欧姆社学习漫画

漫画微分方程

〔日〕佐藤　实／著
〔日〕あづま笙子／漫画绘制
〔日〕株式会社TREND-PRO／漫画绘制
乌日娜／译

科学出版社
www.sciencep.com

前言

一提到微分方程，大家总感觉挺难。事实上，这门课的确挺难懂。老实说，我当时听课的时候，也总是搞不明白。正如本书中的野山大地所说，虽然会计算，但是完全不知道为什么要那么算。尽管记忆了各式各样的解题模式和公式，练习题也能解得出来，但很多人对微分方程总有一种云山雾罩的感觉。

一般大家都认为，求解微分方程是一件不太容易的事，但本书中不会出现解不出的微分方程。知道解法的话，谁都应该能解得出来。数学家们已经用各种解法和公式为我们开辟了许多条道路，沿着这些道路前进，谁都可以得到解答。只是，艰难跋涉于不熟悉的数学世界时，我们往往会被眼前的数学运算难住。如果仅仅囿于自己的小圈子，就无法通览全局，最后只会迷失在数学的世界里。抬头环顾一下四周，也许你会发现另一番开阔美丽的景色。

这本书是一本循循善诱的微分方程方面的指导书，它会带你畅游在微分方程的世界中。与一般的教科书有所不同，本书没有网罗微分方程这门学问的所有分支，也没有刻意追求数学的严密性和普遍性。总之，在沿着既定路线艰难摸索的同时，也请你尽情地享受沿途的美景吧。就像我们头顶上的天空一样，独自飞翔于微分方程的世界里也是有很多乐趣的。人类虽然没有翅膀，但是已经能够制作翅膀在空中翱翔了。有了微分方程这个翅膀，我们也一定能够在数学世界里自由地畅翔。如果大家将本书作为跳板，也能在微分方程的天空中展翅高飞的话，我会荣幸之至。

最后，本书能够面世多亏了欧姆社的全体员工、用“数学之神”的有趣创意为本书创作脚本的SWP先生、成功地将抽象数学世界表现为生动形象图画的漫画家笙子，在此向大家表示衷心的感谢。本书的面世是我们团队合作的结果。

佐藤　实

目次

序
数宫神社的数学女神


啊哈……
好无聊啊！
嗯
真想找个地方出去玩玩……
数宫神社的守护神
数学女神（年龄不详）


啊！
水木！
让我借用一下你的身体吧，
我想出去嘛……
不行，女神！
您会累着的。
数宫神社的女巫
水木
神社里没有神仙
恐怕不行吧？
但是，又没有来参拜者，我很无聊嘛！
……
哼


最近一点利润都没有，遭人议论了吧？
您有在好好工作吗？
这……
这个……
您觉得闲，那又怪得了谁呢？
偷懒中……
我有义务守护这个神社。
身为学问之神，还请您好好工作才是！
好吧……
………
垂头丧气地
挨批评了……


没办法呀……
好！
实现！
绝对让它实现！
等我的好消息吧！
那么，请您满足下一个参拜者的愿望吧！
这样的话，我就借我的身体给您用一天！
啊！
真的吗！？
啪
大学二年级学生
野山大地
这个家伙……
不是那么聪明，但也不错。


等下，我在呢！
困惑的年轻人！
来！
说出你的愿望吧！
哇！
您……您是哪位呀？
好啦……快点说说你的愿望呀！
嗯……我，我想让……
说什么呢？
自己变得……
聪明。


ガー
别做梦了！！
那就认真学习去！
哇……对不起，对不起！
女神！！
那也太便宜他了吧！
这个……
您为什么要许这样的愿望呢？
啊……那是因为……
我完全不理解微分方程的计算……
即便会计算，也不明白自己在做什么。
所以，你想更好更深入地去理解它……
哦……
微分方程啊……
嗯，想理解这个？
我知道你的愿望了！
啊？

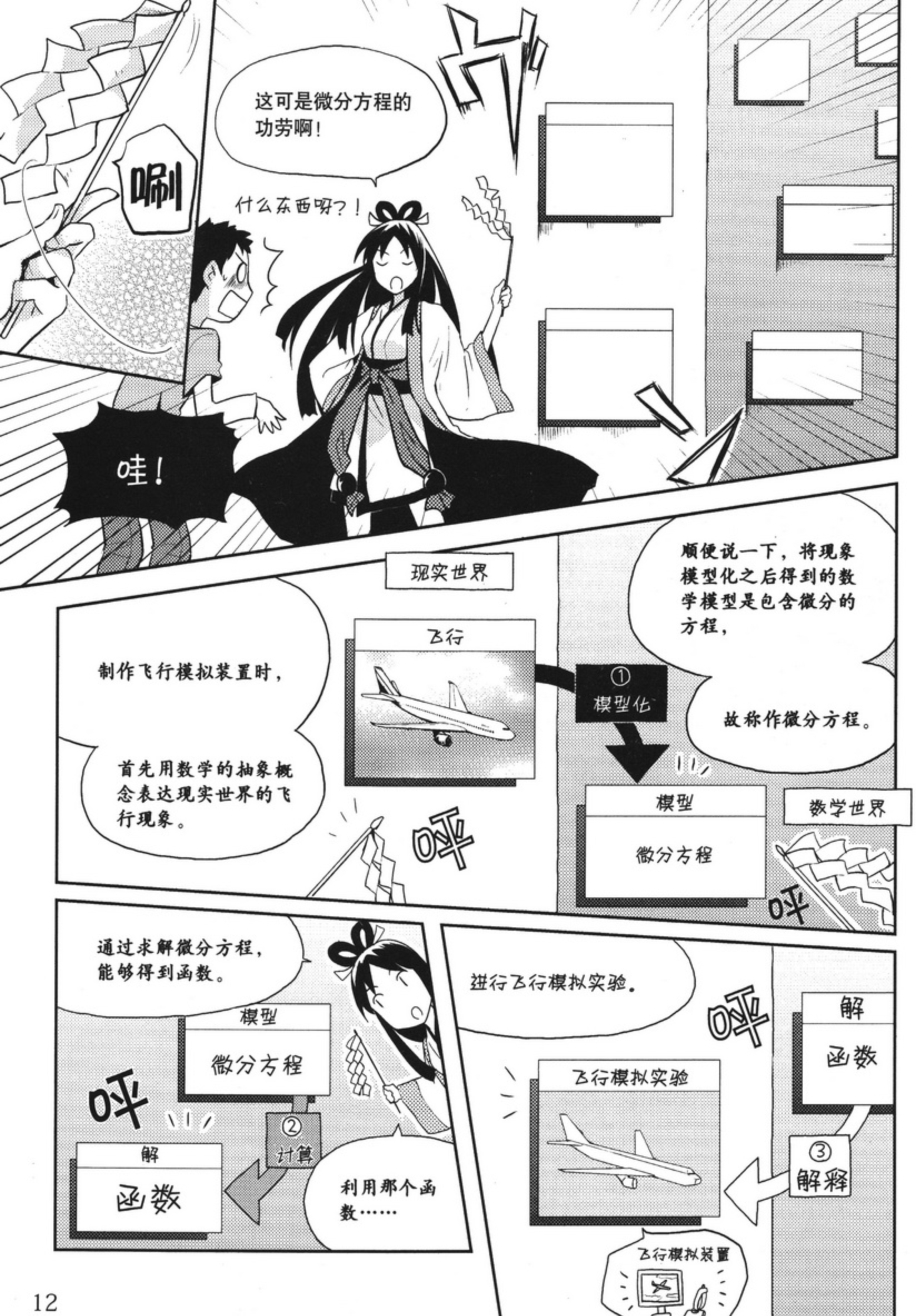

我来教你微分方程！
所以你要努力去理解！
诶？
这……这可以吗？
当然可以了！
我是女巫水木。
啊……我叫野山大地。
那个……
那个人到底……
那位是数学女神，是数宫神社的保护神。
也就是所谓的神仙。
啊？
神仙？
真的吗？
当然是真的。
嘿嘿
好，开始工作吧！
我会毫不留情地教你哟……
好！
拜托您了！
数宫神社

第1章

什么是微分方程


诶！
想外出游玩吗？
干什么去呀？
去散散心啊。
神仙……
也需要……
散心啊？
是去吃美食、散散步什么的吧！
啊！
那个……生元屋的蛋糕看起来非常美味呀。
据说，泡芙、白玉赤豆羹都很好吃，所以又叫做“冬花亭”。
呼
你……不太了解微分方程，倒是对甜点比较熟悉啊……
这个你就别管了……
啊！
好想去啊！
蛋糕♡
泡芙♡
还是先学习吧！
咣！


马上开始上课！
你要快点理解才行哦！
拖走了
微分方程是一种工具，能够在数学世界里表现你们所居住的现实世界的现象。
所以说，
掌握了微分方程，
就可以预见未来。
未来……
你知道飞行模拟装置吗？
是不是类似于电脑游戏呀？
是的，
用它可以模拟地操纵飞机。
那么，飞行模拟装置是如何感知飞机的飞行的呢？
虽然还不是太明白……
大概是用计算机计算的吧……
大概
是的，
是可以计算出来的。

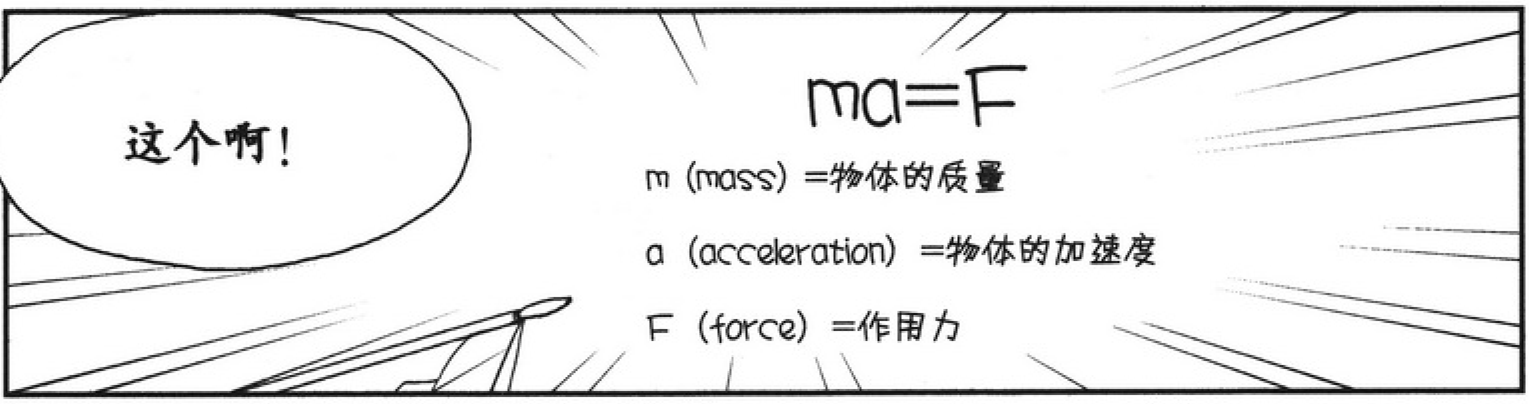


这可是微分方程的功劳啊！
唰
什么东西呀？！
哇！
现实世界
顺便说一下，将现象模型化之后得到的数学模型是包含微分的方程，
故称作微分方程。
制作飞行模拟装置时，
首先用数学的抽象概念表达现实世界的飞行现象。
飞行
①
模型化
模型
微分方程
数学世界
呼
呼
通过求解微分方程，能够得到函数。
模型
微分方程
呼
②
计算
解
函数
利用那个函数……
进行飞行模拟实验。
呼
解
函数
飞行模拟实验
③
解释
飞行模拟装置


现实世界
数学世界
能够完成模拟实验，当然也能用于预测。
飞行
①模型化
微分方程
模型
太零碎了！女神……
飞行模拟实验
飞行模拟装置
解
函数
②计算
③解释
哦……原来如此……
天气预报靠的也是微分方程哦！
预 报
将大气的运动模型化，得到微分方程。通过求解这个微分方程，就能够预测出大气的活动状态。
气象
①模型化
微分方程
模型
天气预报
气象模拟实验
函数的解
②计算
③解释
除此之外，微分方程还被广泛应用于灾害规模、人口变化、广告效果和商品销售额等各种各样的领域。
微分方程也可用于预测今后全球变暖的情况以及全球变暖可能引起的结果。
20世纪
21世纪
-1 0 1 2 3 4 (℃)
原来如此啊！


怎么样，听明白了吗？
那个……
听明白了吗？
似懂非懂啊……
说什么呢！
复杂的表情
女神！
咣！
举个实际的例子，怎么样？
好麻烦的事啊……
不好意思……
点心又泡汤了……
ん
……
……看那个！
滑翔机？


如何得知那架滑翔机
到达目的地的时间呢？
嗯……
啊……
行啦！
①将现实中滑翔机的运动模型化，
滑翔机的位置
①模型化
②在数学世界中求解微分方程，
模型
微分方程
②计算
解
位置关于时间的函数
③解释
预测滑翔机的位置
③利用这个函数，我们可以得知滑翔机从过去到未来的任意时刻的位置。
从过去到未来的任意时刻……
过去的位置
预测未来的位置
这要多亏微积分呀。
模型
解
位置关于时间的函数
是微积分的功劳。
是的！



加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

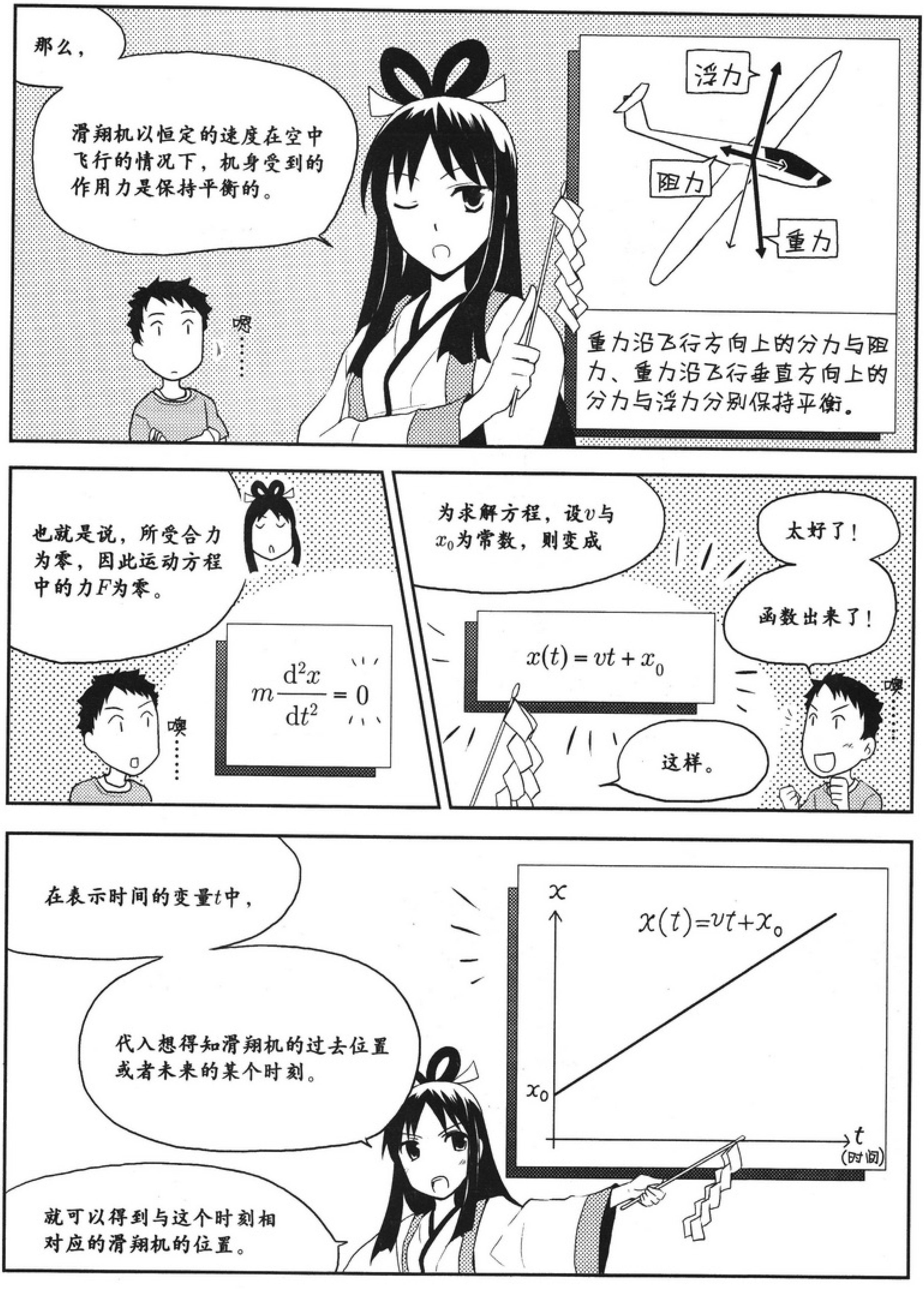
$$ma=F$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F$$

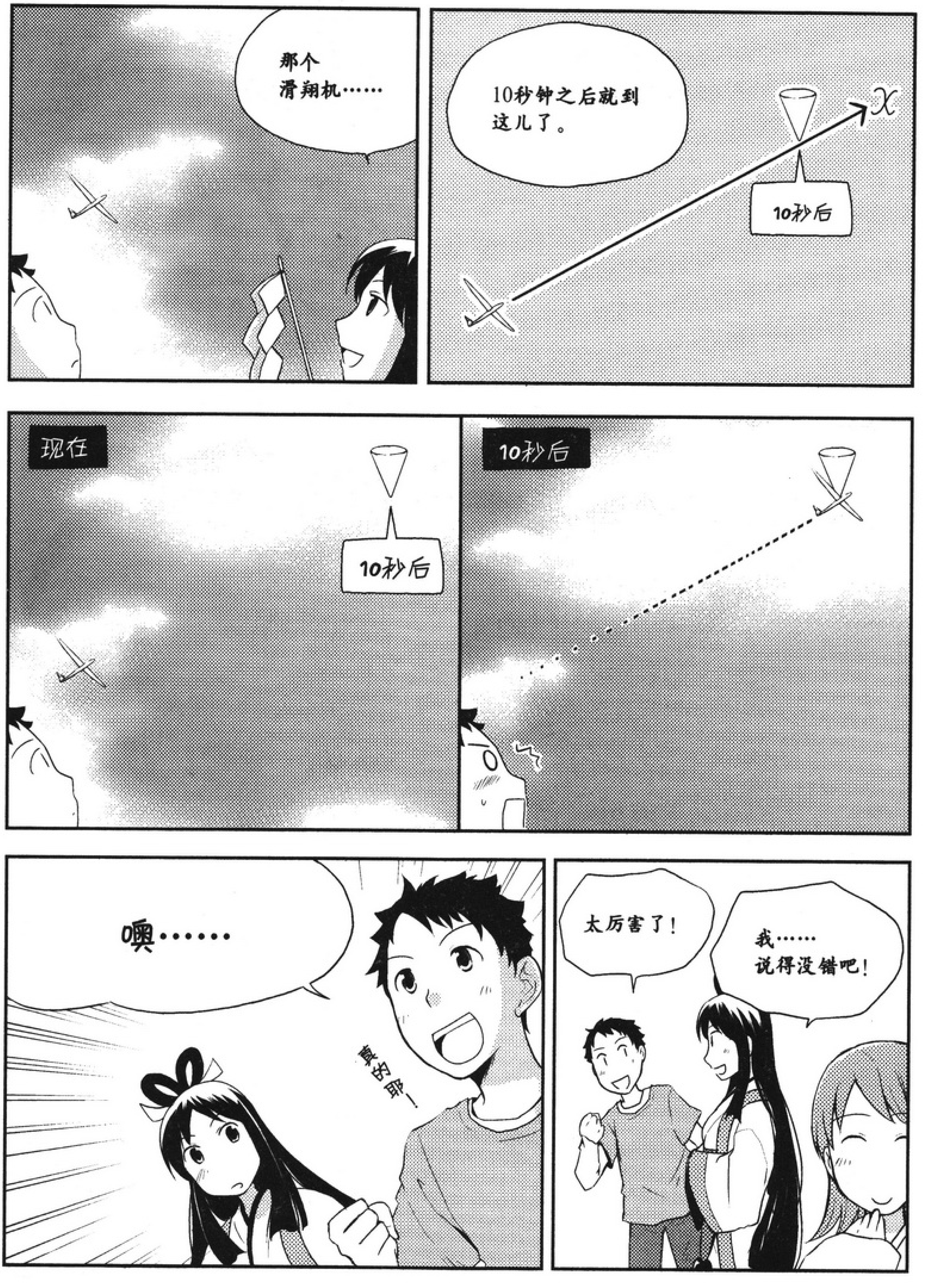
顺便说一下，含微分的方程就是微分方程。
呼
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0$
这种看似简单的方程可是典型的微分方程哦！
诶？
这样我们就完成了滑翔机运动的简单模型化。
通过微分方程，我们就能得知滑翔机从过去到未来任意时刻的位置！
飞行
① 模型化
模型 微分方程
$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F$
怎么样？感动吧！？
………
………
哦？是吗？
啊……

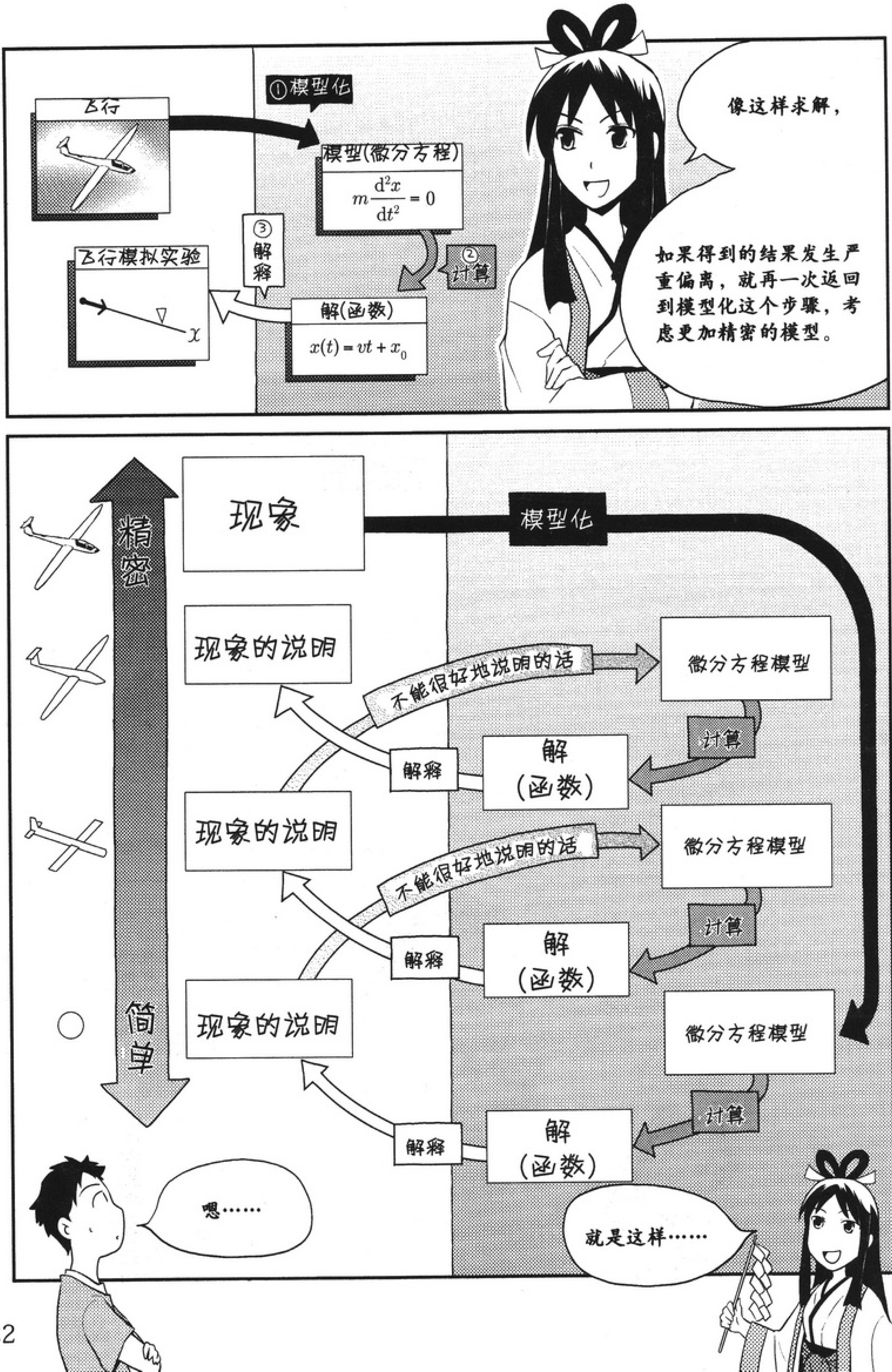

有什么值得感动的呢……
不明白……
怎么还不明白呢……仅仅是提炼出这个本质的模型就值得感动……
对于数学女神来说，微分方程一写出来，
就明白所有的事情了。
数学女神，
麻烦您，能帮我求解这个微分方程吗？
数学女神难以越过现实世界的壁垒，大地也跨不过数学世界的障碍啊。
但是，大地还没有得到女神的真传呢。
嗯……
那样啊……
那么，
$m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F$求解这个方程吧！
！！

那个……m是表示质量吧？
质量是多少来着？
嗯……
好像没在听
听我说！
不能像求方程的解那样，代入数值进行求解！
求解微分方程，要得到的不是数值，而是函数！
是！
这次，我们求一下满足这个运动方程
$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F$
的函数$x(t)$。
这个微分函数包含函数$x(t)$，
如何才能得到被微分的函数呢？
啊！
那就得靠积分了。
对！
微分的逆运算——积分！
逆运算
除法⟷乘法
微分⟷积分
为求解微分方程，必须进行积分。



那么，
滑翔机以恒定的速度在空中飞行的情况下，机身受到的作用力是保持平衡的。
浮力
阻力
重力
重力沿飞行方向上的分力与阻力、重力沿飞行垂直方向上的分力与浮力分别保持平衡。
嗯……
也就是说，所受合力为零，因此运动方程中的力F为零。
$m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0$
噢……
为求解方程，设v与x_0为常数，则变成
$x(t)=vt+x_0$
这样。
太好了！
函数出来了！
噢……
在表示时间的变量t中，
代入想得知滑翔机的过去位置或者未来的某个时刻。
就可以得到与这个时刻相对应的滑翔机的位置。
x
$x(t)=vt+x_0$
x_0
t
(时间)


那个
滑翔机……
10秒钟之后就到
这儿了。
10秒后
x
现在
10秒后
10秒后
噢……
真的耶！
太厉害了！
我……
说得没错吧！


①模型化
飞行
模型(微分方程)
$m\frac{d^2x}{dt^2}=0$
②计算
解(函数)
$x(t)=vt+x_0$
③解释
飞行模拟实验
x
像这样求解，
如果得到的结果发生严重偏离，就再一次返回到模型化这个步骤，考虑更加精密的模型。
精密
简单
现象
模型化
现象的说明
不能很好地说明的话
微分方程模型
计算
解(函数)
解释
现象的说明
不能很好地说明的话
微分方程模型
计算
解(函数)
解释
现象的说明
微分方程模型
计算
解(函数)
解释
嗯……
就是这样……


采用何等精度的模型取决于想从多远的距离眺望滑翔机。
飞行模拟实验。
x
在此例中，从遥远的地方眺望滑翔机整体的运动时，可以忽略其形状，当做一个点来处理。
若想知道滑翔机周围空气的流动状态，应该考虑更加复杂和精密的模型。
什么意思呢？
因为在这种情况下，不能忽视机身的形状。
飞行模拟实验
啊……
感觉好难啊……
模型化是经验！
为充分观察现实世界中发生的现象，
我们有必要掌握根据模型判断结果的知识。


那首先……怎么做才好呢？
对于典型的现象，可以考虑各种各样的模型，因此，要学会使用这些模型。
类似的问题都需要会解才行。
从今以后，你要好好学习贯通现实世界与数学世界的本事。
……现实世界与
$m\frac{d^2x}{dt^2}=F$
数学世界……
回答我呀！
知……知道了！
好好努力呀！

第 2 章

微积分的基本定理


保佑我在这次模拟考试中考出好成绩……
学习去！
保佑我在补考中有所突破……
学习去！
保佑我血压下降、生意兴隆、老婆快点回来……
………
参拜者又不多，怎么这样对他们呢，
虽说他们看不到，但是也请您礼貌一点嘛！
稍微尽心尽力一点……
我不是学这个专业的！
不知道吗？
哇
女神！


人们把烦恼什么的都依赖在我身上。
但是听取这些不就是数学女神您的主要工作吗？
神志恍惚地，干什么呢？
那家伙还没来啊？
快点干活！早点开始甜点之旅……
是大地吗？
啊，
女神，你好啊！
我早就到了。
在里面帮忙打扫来着。
哗
……嗯，干得挺好！
嗯
？
那么，我们快点继续上课吧！

那个……
什么事？
我想知道，为什么能用微分方程进行模型化……
这要多亏微积分的基本定理呀！
……
……你完全理解微分积分了吗？
咣
果然是不行啊！
是
看来，学习典型微分方程的模型之前，要先钻研重要基础知识才行啊！
对不起！
好吧……

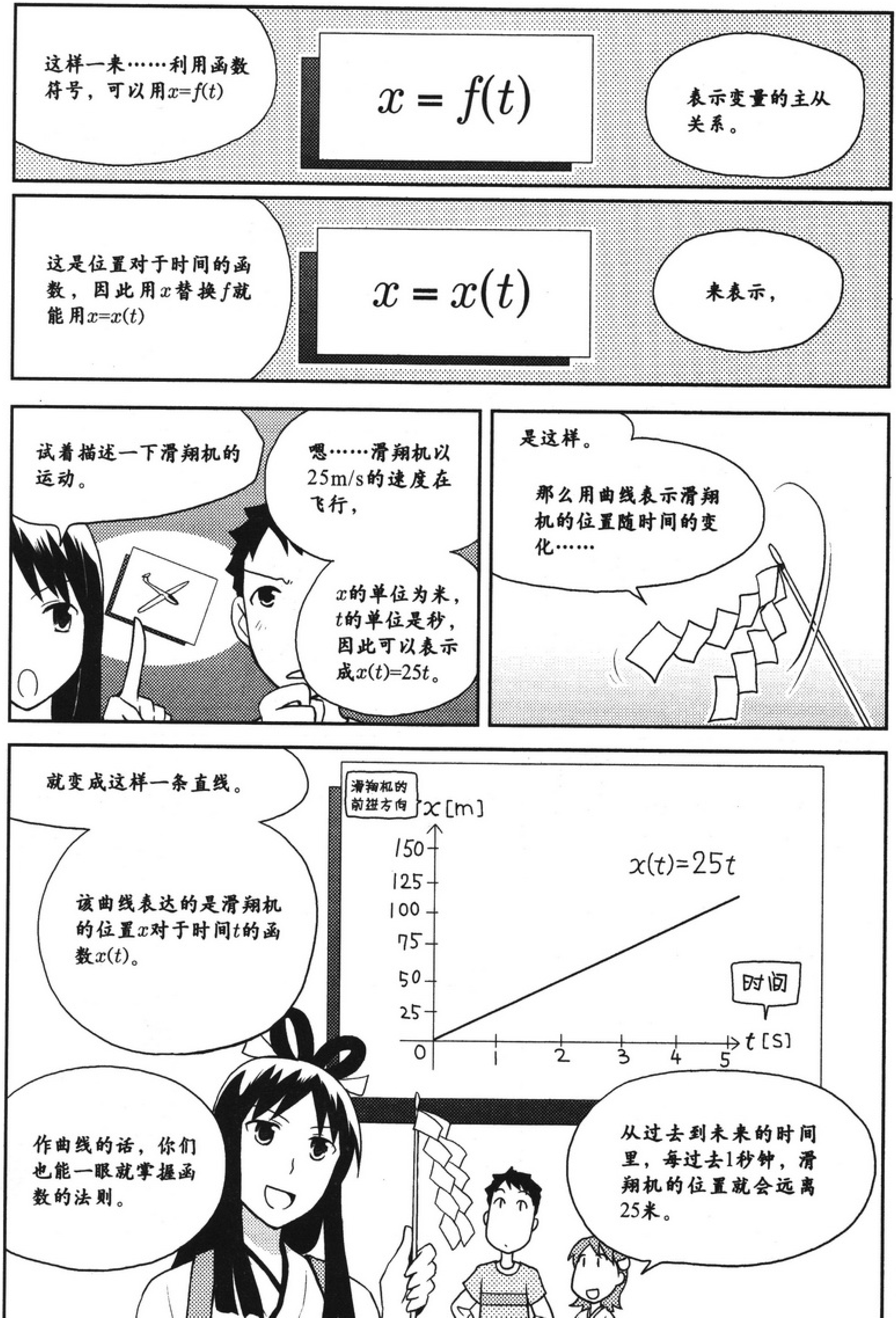
1. 函数、变量和曲线

这些概念在前几天的讲解中都已经用到了，在模型化时要用到函数。
x
y
函数就是与x相对应的y的关系。
啪
函数就是当x确定时，
遵循某种法则能够确定y。
y
y
x
0
x
这是怎么得到的呢？
且慢，
这是我们的女神该做的事情吧！
f常常作为函数的符号使用。
f
但是，将现象模型化时，经常用文字来表示，而不用f。
设速度为v，温度为T，
速度
v
温度
T
……像这样，增加一些反映性能的符号。
原来如此。
看起来比较容易懂。

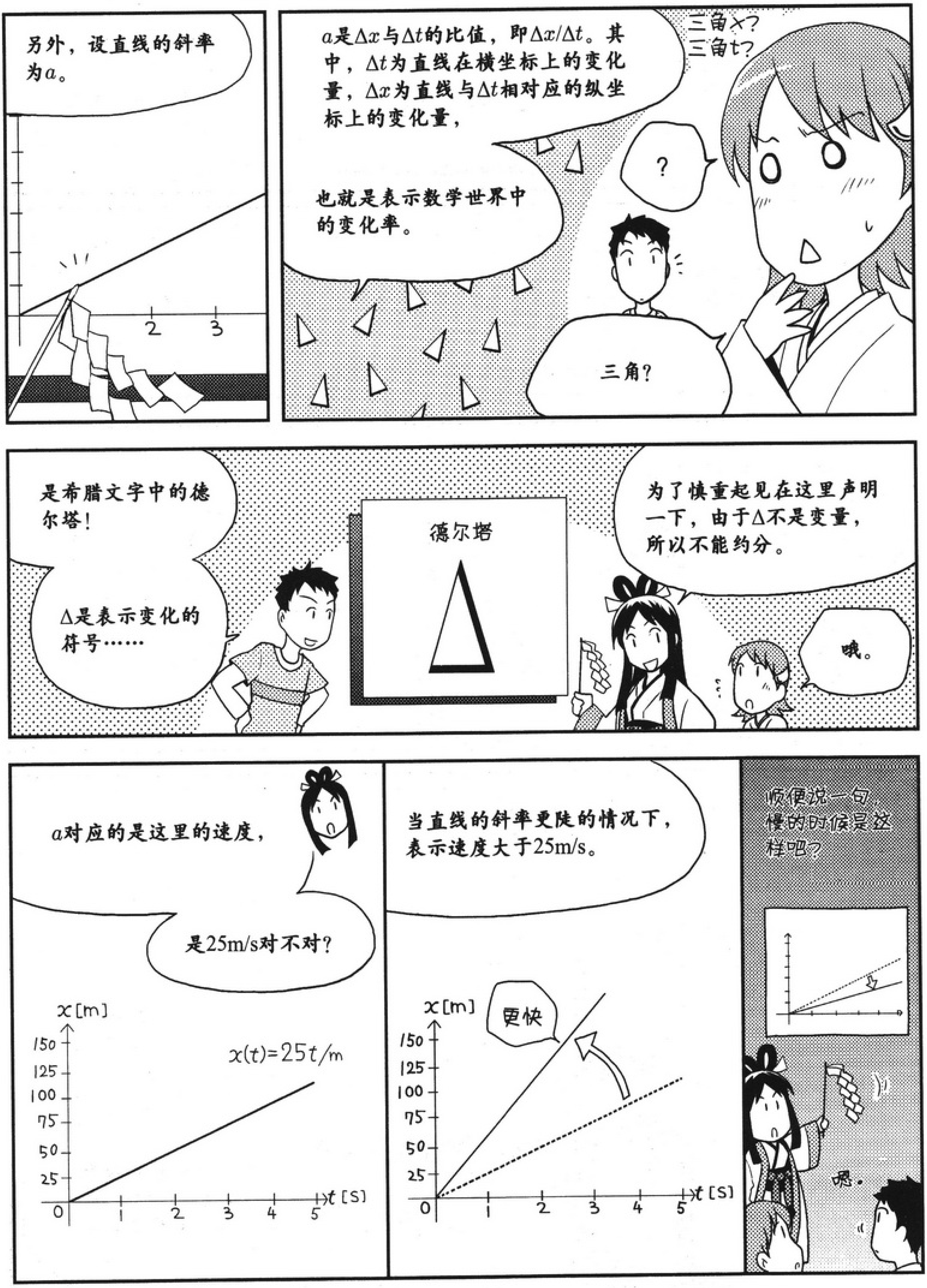
接下来，
研究一下与现实世界相对应的数学世界的语言。
？
什么样的语言呀？
……别再摆出一副疑惑的面孔了！
开始数学世界的旅行吧！
又被发现了……
打起精神来！
好的！
好！
y=f(x)中的x和y都称作变量。
变量
变量
y=f(x)
啊，
这样的语言呀？
变量是将任意的数用文字表达的产物。
这倒是能听得懂！
？
就像扑克中的小丑一样，能变成任意的数。
JOKER
原来如此啊！
那个是什么图案呀？
比如说，写成y=f(x)的这个式子表示变量y是变量x的函数。
y=f(x)
变量x的函数


但是，这里需要注意的是，
即使是相同的变量，y和x的情况也是不对等的。
这是什么意思呢？
x的值随意变化时，与此相对应，y的值也发生变化。
可以随意变化啦！
x
y
哈！我也要变化！
因此，x叫做自变量，y叫做因变量。
自变量与因变量是主从关系。
真像现在的我和你的关系呀！
x(主)
y(从)
好好学习！
哼哼
是！
啊！
……像不像水木和数学女神的关系呀？
是！对不起
不好好干活的话，就不让你玩！
怎么样？
……
那么，考虑一下，将滑翔机的运动模型化时必要的变量！
假设滑翔机沿着x轴前进。
坐标用来表示位置关系，经常用x、y、z等符号来表示。
0
x
滑翔机的前进方向
咳
啊，好直啊！

其次是时间。
假设现在滑翔机以25m/s的速度飞行，
那么可以用滑翔机的位置随时间的变化表示滑翔机的运动。
与时钟上显示的数值相对应的t(时间)轴上的数表示时间。
t
0
时间
12
9
3
6
那么……考虑滑翔机运动模型的函数时，必须确定x和t当中，哪个是自变量，哪个是因变量。
位置
时间
x
t
嗯？
哪个随着哪个变化呢？
哪个是主要的呢……
位置随时间变化还是时间随位置变化呢？
这么想就想明白了。
啊！
对啊。
时间t是自变量，
位移x是因变量。
没错，是那样。
还是选择位置对于时间的关系吧。
是这样的！
为了能够清楚地表现主从关系，用“对于”这个表达习惯来表现。
好的。



这样一来……利用函数符号，可以用$x=f(t)$
$x=f(t)$
表示变量的主从关系。
这是位置对于时间的函数，因此用x替换f就能用$x=x(t)$
$x=x(t)$
来表示，
试着描述一下滑翔机的运动。
嗯……滑翔机以25m/s的速度在飞行，
x的单位为米，t的单位是秒，因此可以表示成$x(t)=25t$。
是这样。
那么用曲线表示滑翔机的位置随时间的变化……
就变成这样一条直线。
该曲线表达的是滑翔机的位置x对于时间t的函数$x(t)$。
滑翔机的前进方向
x [m]
150
125
100
75
50
25
0
1
2
3
4
5
t [s]
x(t)=25t
时间
作曲线的话，你们也能一眼就掌握函数的法则。
从过去到未来的时间里，每过去1秒钟，滑翔机的位置就会远离25米。



另外，设直线的斜率为a。
2
3
a是Δx与Δt的比值，即Δx/Δt。其中，Δt为直线在横坐标上的变化量，Δx为直线与Δt相对应的纵坐标上的变化量，
也就是表示数学世界中的变化率。
三角x？
三角t？
？
三角？
是希腊文字中的德尔塔！
Δ是表示变化的符号……
德尔塔
为了慎重起见在这里声明一下，由于Δ不是变量，所以不能约分。
哦。
a对应的是这里的速度，
是25m/s对不对？
x[m]
x(t)=25t/m
150
125
100
75
50
25
0
1
2
3
4
5
t[s]
当直线的斜率更陡的情况下，表示速度大于25m/s。
更快
x[m]
150
125
100
75
50
25
0
1
2
3
4
5
t[s]
顺便说一句，慢的时候是这样吧？
嗯。

那么，如何从曲线上得到速度的具体数值呢？
用除法！
我知道!!
是这样的，保留单位的情况下，计算位移对于时间的变化率Δx/Δt。
x[m]
t[s]
若时间t的单位为s(秒)，位移x的单位为m(米)，那么速度的单位就是m/s(米每秒)。
秒 s
米 m
米每秒 m/s
时间 h
千米 km
千米每小时 km/h
若时间的单位为h(小时)，位移的单位为km(千米)，那么速度的单位就是km/h(千米每小时)。
顺便说一下，曲线的截距b是数学世界的语言，表示曲线与纵坐标相交的数值。
在这个例子中，与b对应的现实世界中的量是初始位移。
x[m]
x(t)=25t+b
150
125
100
75
50
25
0
1
2
3
4
5
t[s]
b
换句话说，表示开始计时时滑翔机所处的位置。
哦……


若不用具体的数值，
而是用文字像$x=at+b$这样表示斜率和截距，则更具普遍性。
a
b
为了踏入数学世界，要舍弃一些个性才行啊！
舍弃个性？
a
b
普遍化是有好处的。
比如说，如果用25m/s表示滑翔机的速度，只能表达一个飞行的状态。
25m/s
但用v表示速度的话，能够表示任意的速度。
v
v
v
不只是这些！滑翔机的速度、车速、自行车的速度还有兼职工资计算等，
数学世界中表现相同的事物都能够用同样的方法进行处理！
这也是数学世界的优点之一！


进入数学世界，
就没有必要介意这些变量原来表示的是什么。
$v=\frac{dx}{dt}$
$x=f(t)$
按照数学的规则进行处理。
现实世界
数学世界
滑翔机
模型化
变量，等等
计算
在现实世界中解释数学世界得出的结果时，必须要把个性重新找回来才行啊！
被解释的滑翔机
想想这里的变量表示的是什么。
原来如此……
感觉有点明白模型化的好处了……
另外，
数学世界中有一些是经常用到的函数，他们的名字分别被附在书的后面。
要能够辨认其中一些常用的函数及其曲线。

■指数函数

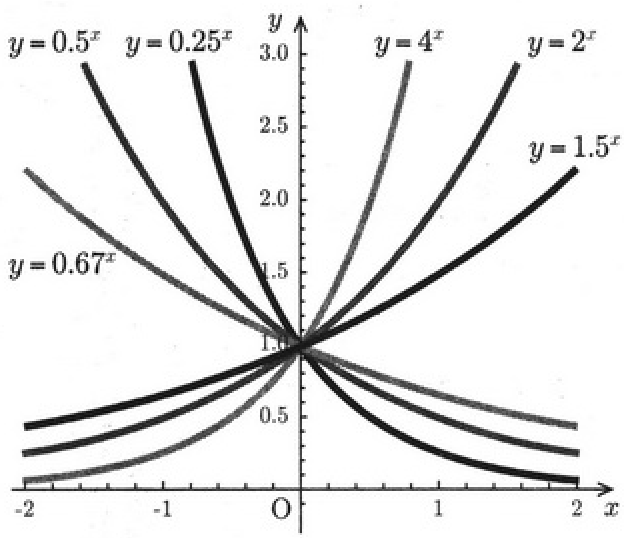
时而连续递增、时而连续递减

设a为某一常数，则表示成

$$y(x)=a^x$$

的函数称为指数函数。

指数函数的曲线如右图所示。



指数函数中，a为任意常数，在处理微分方程时非常重要的指数函数是以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=2.718281828459045235\cdots$$

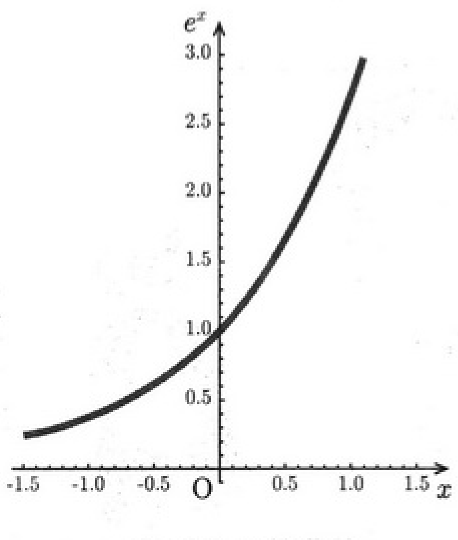
定义的常数e的指数函数。

$$y(x)=\mathrm{e}^x$$

这里出现的符号e表示的数叫纳皮尔数。指数函数的基本性质有

$$a^xa^y=a^{x+y},\ \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\ (a^x)^y=a^{xy},\ \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}\ ,$$

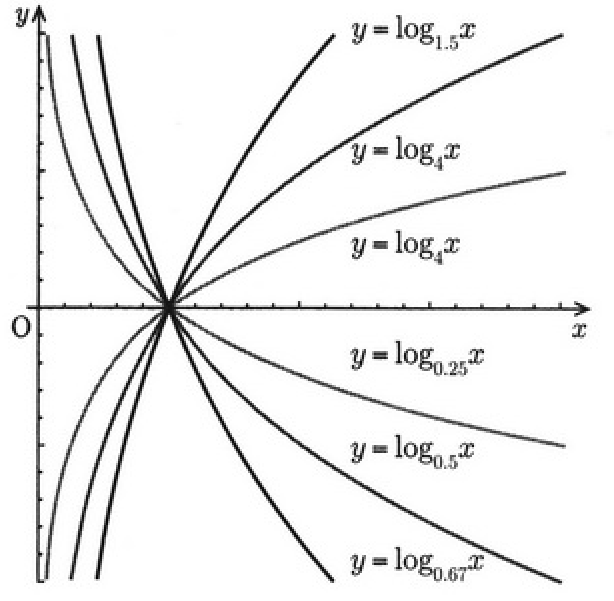
等等。



◆ $y(x)=\mathrm{e}^x$的曲线

■对数函数

连续变化的同时变化慢慢减弱



指数函数的反函数称为对数函数。我们把

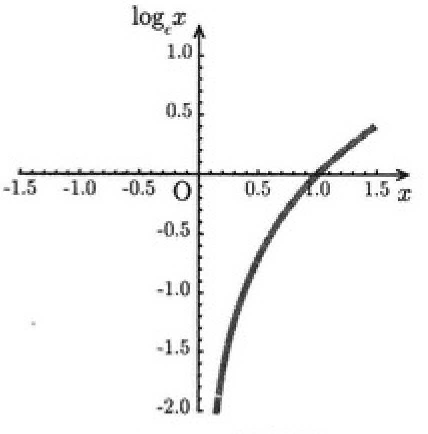
$$x = a^y$$

改写成y等于的式子

$$y(x) = \log_a x$$

这就是对数函数。

对数函数的曲线如右图所示。



◆ $y(x)$=ln$x$的曲线

常数a称为底数，底数为10的对数$\log_{10}x$是常用对数，底数为e的对数$\log_e x$称作自然对数。自然对数在处理微分方程方面尤其重要。为了表示自然对数，可以简化为

$$y(x) = \ln x$$

对数函数的基本性质有

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,\ \log_a x^y = y\log_a x,\ \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}\ ,$$

等等。

■三角函数

时而递增时而递减摇摆变化的函数

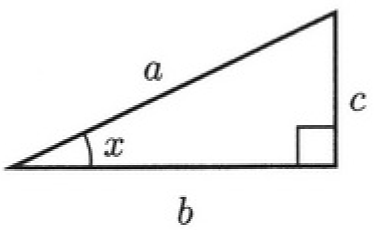
如下图所示，以直角三角形的各个边长与角的关系

$$\sin x = \frac{c}{a},\ \cos x = \frac{b}{a}$$

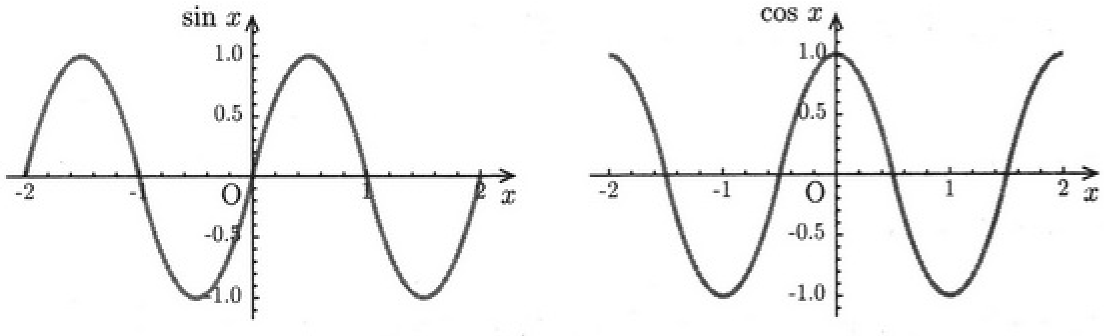
定义的函数统称为三角函数。由于这些函数是以2π为周期的周期函数，所以常常用它们来描述周期性的现象。根据勾股定理，有

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

成立[1]。设p=cos$x$，q=sin$x$，则$p^2+q^2=1$，表示与pq平面圆周上的点相对应。



◆ 直角三角形的各个边与角



◆ 三角函数的曲线——左边的是sin$x$、右边的是cos$x$

1 利用接下来要出现的欧拉公式，也可以得到。

■双曲线函数

与三角函数性质非常相似的函数

乍一看没有任何关系的指数函数与三角函数，通过欧拉公式[2]

$$e^{\pm ix}=\cos x \pm i\sin x$$

引入虚数形成难以分离的关系。用欧拉公式

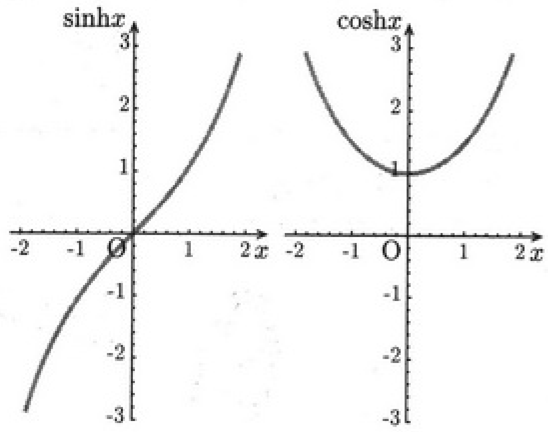
$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\ \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

可以得到上述关系式。双曲线函数的定义与此非常相似。双曲线函数是定义为

$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\ \sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

的函数（右图）。根据定义，

$$\begin{aligned}\cosh^2 x-\sinh^2 x&=\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2\\&=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}-\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}\\&=1\end{aligned}$$

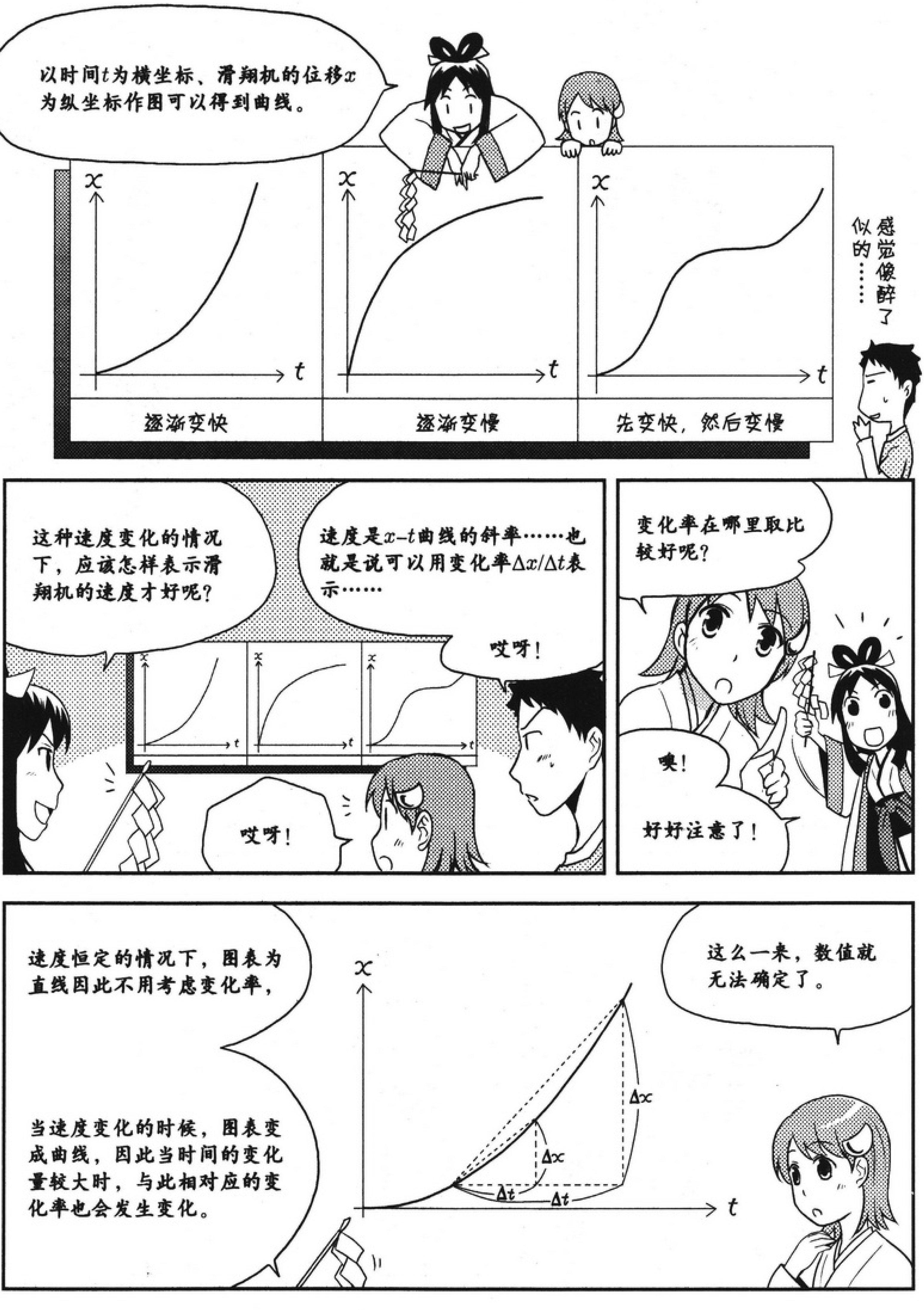


◆ 双曲线函数的曲线——左边为sinh$x$，右边为cosh$x$。

成立。设$p=\cosh x$，$q=\sinh x$，则$p^2-q^2=1$，与pq平面双曲线上的点相对应。这就是双曲线函数这个名字的缘由。由于双曲线函数被称作hyperbola，因此cosh被称为余弦双曲线函数，sinh被称为正弦双曲线函数。虽然，名字与三角函数颇为相似，但是函数的性质方面基本没有相似的地方，所以还是把它们当做完全不同的东西看待吧。

2 将指数函数与三角函数分别按级数展开，可以得出如下推论。当$x=\pi$的时候，变成$e^{i\pi}+1=0$，e、π、1、i、0结合在一起，得到了一个神秘的式子。无理数e的iπ次方加1得0，实在是令人惊讶。

2. 微 分
刚才考虑了滑翔机以恒定的速度飞行的情况。
但是，实际上也能减速和加速的吧？
是啊！
一直以恒定的速度持续飞行的滑翔机之类的情况当然不存在！
恒定
减速
加速
弯曲和直线……
用上面的那种方式，既不能起飞也不能着陆！
所以，为了使模型更加接近现实世界，我们来考虑一下运动状态变化的情况吧！
假设飞行路线为直线，速度是变化的。
好的！

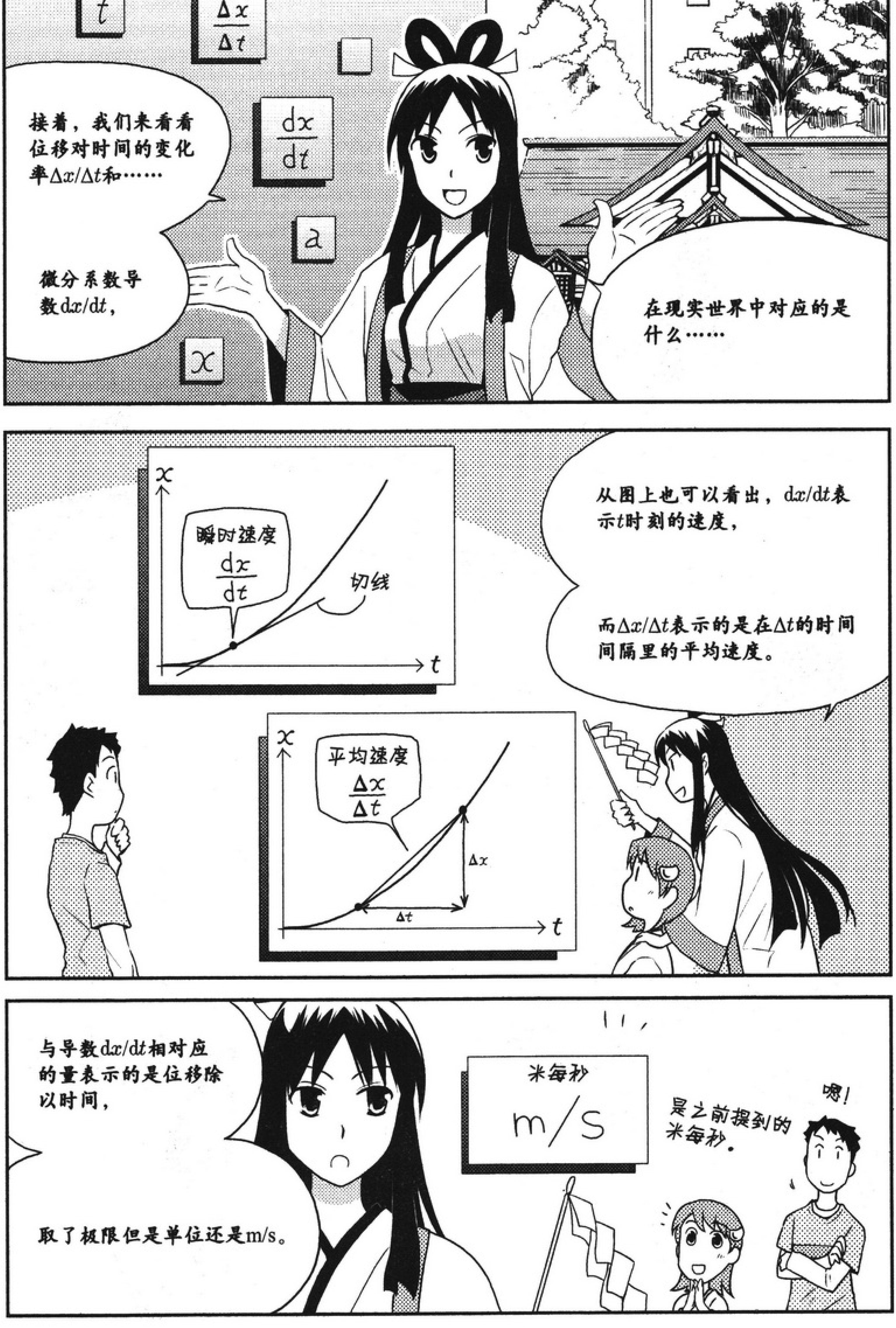

以时间t为横坐标、滑翔机的位移x为纵坐标作图可以得到曲线。
x
t
逐渐变快
逐渐变慢
先变快，然后变慢
感觉像醉了似的……
这种速度变化的情况下，应该怎样表示滑翔机的速度才好呢？
速度是x-t曲线的斜率……也就是说可以用变化率$\Delta x/\Delta t$表示……
哎呀！
哎呀！
变化率在哪里取比较好呢？
噢！
好好注意了！
速度恒定的情况下，图表为直线因此不用考虑变化率，
当速度变化的时候，图表变成曲线，因此当时间的变化量较大时，与此相对应的变化率也会发生变化。
Δx
Δt
这么一来，数值就无法确定了。

这时，我们试着将时间的变化量变小。
时间
t
嗨
t
这样不就变小了吗？
噢！
时间
t
x
t
这样一来，变化率就慢慢接近一个恒定的值。
最后，以直线代替曲线。
做成了！
变化率则表示曲线上那个点的切线的斜率。
但是这次，会产生让我们困惑的事情……
a
y=
y
x
诶？
时间的变化量Δt变成0的话，Δx/Δt中的分母就变成0，所以就无法计算了。
x
a
y
t
x/0
唉……
拒绝
诶？
那该怎么办呢？

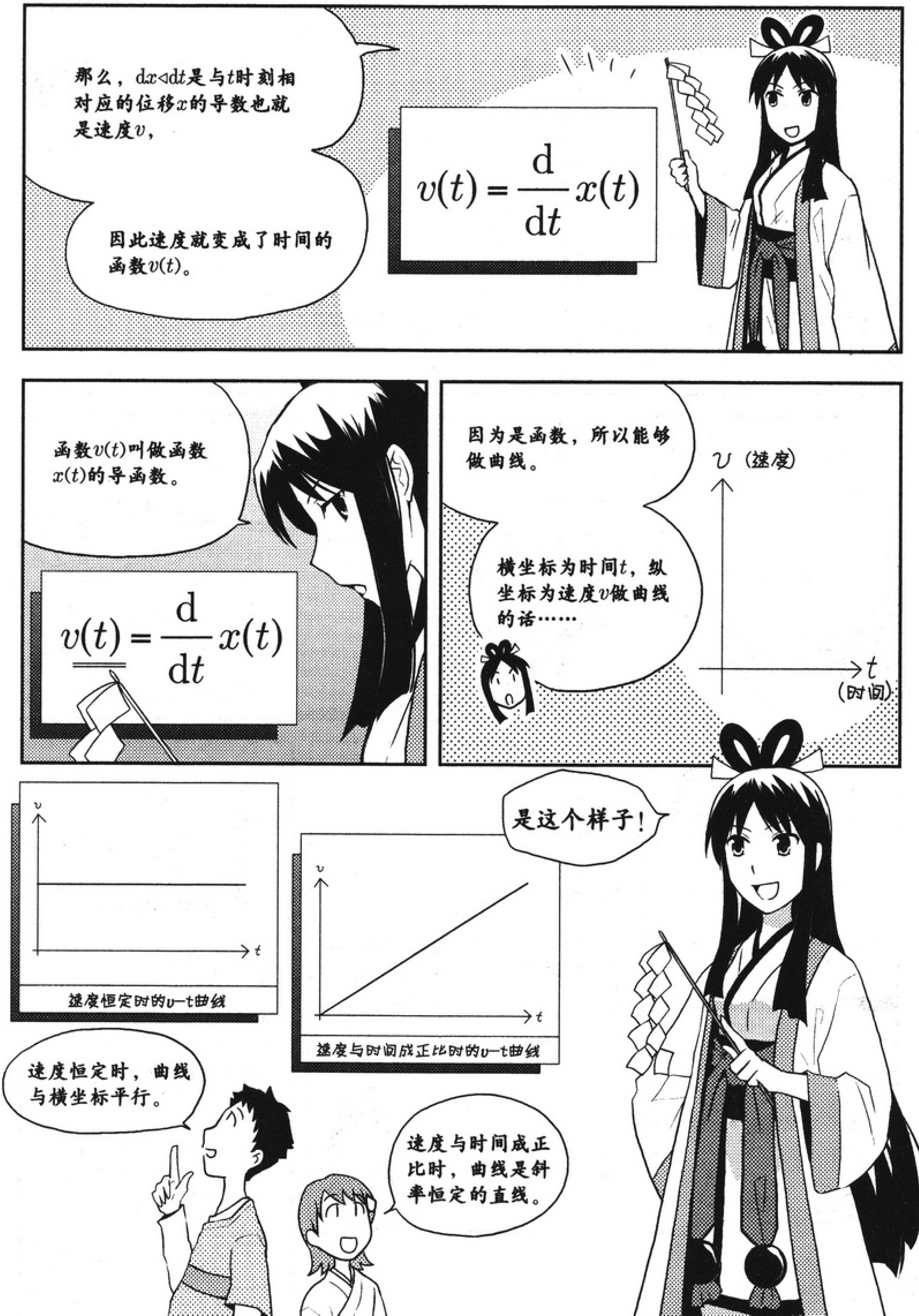

不能把Δt变成0，那么设Δt为……
越切越短……
零
t
趋近于0的数就可以了！
像这种，使变量无限趋近于某个数的数学操作，
零
叫做求极限。
t
看
像这样写！
Δt→0
（无限趋近于0的情况）
砰
这样就可以计算了！
不过，好像有点没道理啊！
说什么！
没有理由就是最好的理由！
呵……
不管怎么说，这里能够求出的变化率只有一个，
这样就能够连接现实世界和数学世界了。
t
a
x=f(t)
y
Δt→0

那么，
现在的情况是，求时间间隔Δt无限趋近于0的情况下，时间的变化量与其对应的位移变化量的比值$\Delta x/\Delta t$的极限。
$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$
稍微进行一下数学处理！
可以这样来表现。
除法计算前面的lim……
$\lim_{\Delta t \to 0}$
是表示“极限”(limit)的符号。
那么，位置的变化量Δx是表示从t时刻的位置移动到$t+\Delta t$时刻的位置的位移量。
位置随时间的变化
公式（2）表示。
$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$
看
利用位置对于时间的函数，
可以这样表示。
用上述减式替换位置的变化量Δx的话，则时间间隔Δt无限趋近于0……
无限趋近于0的情况
$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$
这样来表示。
这个式子叫做与t时刻相对应的位置函数$x(t)$的导数。
看！
$\frac{d}{dt} x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$
这里用d来表示。


如果表示为时间的函数，则较为麻烦，
所以有时只用x表示，如dx/dt。
dx/dt
我们习惯性地称这种数学运算为……
x(t对t求微分。
若想更简单点表示，也可以写成……
x′
x′(t)
ẋ
啊！
这么多呢……
……
dt分之dx吗？
dx/dt
读成“dx·dt”。
表示函数x(t)的导数。
啊！
不是分数呀？
dx/dt
由于d不是变量，所以不能进行约分哦！



接着，我们来看看位移对时间的变化率Δx/Δt和……
微分系数导数dx/dt，
在现实世界中对应的是什么……
从图上也可以看出，dx/dt表示t时刻的速度，
而Δx/Δt表示的是在Δt的时间间隔里的平均速度。
瞬时速度
dx/dt
切线
平均速度
Δx/Δt
Δx
Δt
与导数dx/dt相对应的量表示的是位移除以时间，
取了极限但是单位还是m/s。
米每秒
m/s
是之前提到的米每秒。
嗯！


那么，dx◁dt是与t时刻相对应的位移x的导数也就是速度v，
$v(t)=\frac{d}{dt}x(t)$
因此速度就变成了时间的函数v(t)。
函数v(t)叫做函数x(t)的导函数。
$v(t)=\frac{d}{dt}x(t)$
因为是函数，所以能够做曲线。
横坐标为时间t，纵坐标为速度v做曲线的话……
v（速度）
t（时间）
是这个样子！
v
t
速度恒定时的v-t曲线
v
t
速度与时间成正比时的v-t曲线
速度恒定时，曲线与横坐标平行。
速度与时间成正比时，曲线是斜率恒定的直线。

函数$x(t)$的导函数
$v(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$
是将函数$x(t)$对时间t进行微分的产物。
也可以将上式再次对时间进行微分。
诶？
$a(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right)$
还能再次微分吗？
“诶”是什么意思啊？
嗯……那个……
你没有好好理解吗？
嗯……啊……
这个叫速度。
$v(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$
砰
砰
$a(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right)$
这个叫加速度！
啊……是这样啊！
也可以这样简化写
$a(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)$
要注意，这里的2虽然看起来像二次方，但并不表示d或者t的二次方。
二次方是这样写的！
$v^2(t)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right)^2$
$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)$
将这里的2理解为两次微分才对哦！
这是非常正确的理解！
一阶导数
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$
二阶导数
$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)$
顺便说一句，微分的次数叫做导函数的阶数。

稍微偏离了滑翔机的运动，开始研究起微分计算的相关内容了。

是啊！

水木真是有干劲啊！

对于函数$f(t)$来说要考虑各种各样的法则。以某几个法则为例，根据定义求一下函数$f(t)$的微分。

首先是常数的情况

$$f(t)=1$$

根据微分的定义得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-1}{\Delta t}=0\,,$$

结果为0。

其次，与t成正比的情况下

$$f(t)=t$$

同样得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)-t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{t+\Delta t-t}{\Delta t}=1$$

等于t的平方的情况下

$$f(t)=t^2$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^2-t^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)-t^2}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2t\Delta t+\Delta t^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t)=2t$$

那么，对t求一次导数得到$2t$。

不管怎么说能够看到法则之类的东西了吧？

嗯……

也许一一列出来的话，会更容易看懂。

$$f(t)=1 \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=0$$

$$f(t)=t \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=1$$

$$f(t)=t^2 \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=2t$$

啊！总算是看出来了……

这里，我们使用了数学里非常有用的一般化技巧。设n为变量，而不是具体的数，考虑一下f与t的n次方成正比的情况

$$f(t)=t^n$$

这时，情况会变得稍微复杂一点，可化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^n-t^n}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t^n+nt^{n-1}\Delta t+\cdots+nt\Delta t^{n-1}+\Delta t^n)-t^n}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{nt^{n-1}\Delta t+\cdots+nt\Delta t^{n-1}+\Delta t^n}{\Delta t}\\&=nt^{n-1}\end{aligned}$$

最后变成t的$n-1$次方的函数nt^{n-1}，不是吗[3]？

$$f(t)=t^n \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=nt^{n-1}$$

这就是所谓的微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^n=nt^{n-1},$$

3 式子中出现的省略号表示的各个项都是存在的。由于n是变量，无法确定项数，虽然不能全部写下来，但这样写还是可以让读者看懂，所以就这样写了。

公式是数学世界的便利工具。由于有了公式，就没有必要逐一从头开始计算了。话虽这么说，但还是建议大家试着自己导一遍公式。即使从未独立导出过一个公式，沿着前人成功的路线，谁都可以导出这些公式。

谁都可以？

是的。这个很重要。计算公式的步骤看起来虽然很复杂，但是所做的事情既出乎意料又简单。教科书中会告诉你几乎所有函数的微分公式，因此务必自己亲手导出这些公式为好！

举几个微分公式的例子

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t=\cos t\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t=-\sin t\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t\end{aligned}\tag{2.1}$$

而且，微分的基本性质如下所示。

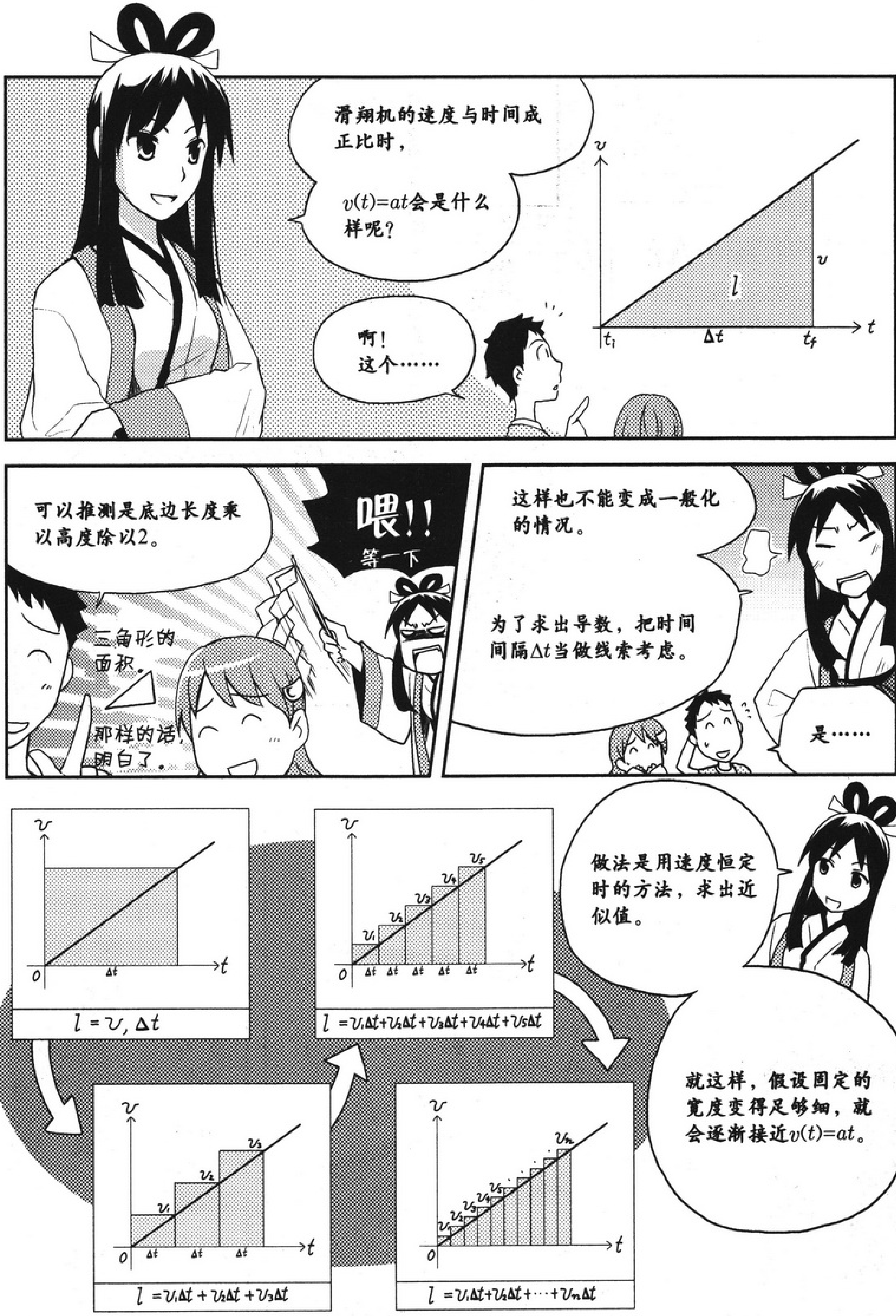
$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha f(t)+\beta g(t))=\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)g(t)=g(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(f(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f(t)}g(f(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\\&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}\quad(y=f(x),\ x=f^{-1}(x))\end{aligned}\tag{2.2}$$

嗯，好的！

3. 积分

回到滑翔机的运动吧！
利用微分，从表示位移的函数$x(t)$得到表示速度的函数$v(t)$。
好！
水木真是有干劲啊！
那么，
反过来想想从表示速度的函数$v(t)$得到表示位移的函数$x(t)$的方法吧！
？
首先考虑一下以恒定速度在空中滑行的滑翔机的运动吧！
在速度恒定的情况下，从时间t_i到时间t_f的时间间隔$\Delta t=t_f-t_i$里移动的距离l……
这个距离可以这样求得，$l=v\Delta t$。
嗯，也就是……
所谓的距离=速度×时间吧？
移动距离=速度×时间
$l = v \times t$
哦
是这样的！

如图所示。
$l = v\Delta t$
模型化
速度恒定的情况下与v—t曲线相对应的移动距离。
移动距离就是被v(t)、t轴、t_i和t_f包围起来的长方形的面积。
v
l
v
t
t_i
Δt
t_f
移动距离l正好是与这个长方形的面积相等。
啊！变成这样子啦！
若能将这个关系一般化，
什么样速度的曲线都可以通过求面积得到它的移动距离！
x
t
0
噢！
好的！
试着看看其他的例子
好！
我也要努力了！
真是有精神啊！



滑翔机的速度与时间成正比时，
$v(t)=at$会是什么样呢？
v
v
l
t
t_i
Δt
t_f
啊！
这个……
可以推测是底边长度乘以高度除以2。
三角形的面积。
那样的话，明白了。
喂!!
等一下
这样也不能变成一般化的情况。
为了求出导数，把时间间隔Δt当做线索考虑。
是……
$l = v_1 \Delta t$
$l = v_1\Delta t + v_2\Delta t + v_3\Delta t$
$l = v_1\Delta t+v_2\Delta t+v_3\Delta t+v_4\Delta t+v_5\Delta t$
$l = v_1\Delta t+v_2\Delta t+\cdots+v_n\Delta t$
做法是用速度恒定时的方法，求出近似值。
就这样，假设固定的宽度变得足够细，就会逐渐接近$v(t)=at$。

这样做，
切细……
把萝卜切成n个长条形相加，式子会变成这样……
切成长条形
呵呵
大地真是能干啊！
$$l = v_1\Delta t + v_2\Delta t + \cdots + v_n\Delta t = \sum_{j=1}^{n} v_j\Delta t$$
这是什么符号啊？
反过来写的3？
西格玛
$\sum$
是希腊文字的西格玛。
在字母表中表示成S，
据说是求和的意思。
$\cdots + v_n\Delta t = \sum_{j=1}^{n} v_j\Delta t$
这么说，就是对这个$v_j\Delta t$的j按顺序从1到n得到的所有项的求和。
那就是……
为了减少误差，令长条形的根数接近于无穷大！
哇！
切细丝
那这个萝卜怎么弄啊？
能吃就好啦
今天要做萝卜沙拉呀
一堆


暂时先把萝卜放一边吧!
……
要求n趋于无穷大的极限……
$l=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}v_j\Delta t$
就用这是个。
这样写!
$l=\int_{t_i}^{t_f}v(t)\mathrm{d}t$
这回出现了一个蜿蜒的符号。
积分符号
$\int$
积分符号$\int$是将字母表中的S上下拉伸得到的符号,
就像这样……
拉伸
总感觉有一种智慧的气息。
是关于智慧吗?
关于读法,谈够了吗?
这就是积分表达式。
积分表达式
$l=\int_{t_i}^{t_f}v(t)\mathrm{d}t$
意思是将$v(t)$对t从t_i到t_f进行积分。
顺便说一下,t称为积分变量,t_i叫积分下限,t_f叫积分上限。
通过积分表达式,就能够从表示速度的函数$v(t)$得到表示位移的函数$x(t)$的方法了。
噢!

滑翔机在t_f时刻的位移坐标$x(t_f)$是滑翔机在t_i时刻的位移坐标$x(t_i)$和从t_f时刻到t_i时刻的时间段移动的距离l之和，则

$$x(t_f)=x(t_i)+l$$

若已知速度的函数$v(t)$，移动的距离l等于$v(t)$对时间t进行积分

$$x(t_f)=x(t_i)+\int_{t_i}^{t_f}v(t)\mathrm{d}t$$

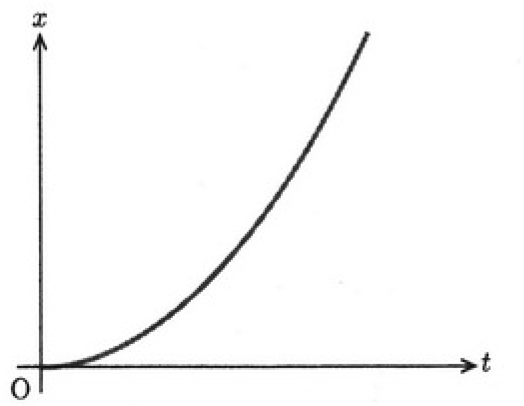
可以表示成上式。这里，为了使静止（表示特定的时刻）的变量t_f动起来（不只是在特定的时刻），可以表示到任何一个时刻t[4]的运动，这样一来，移动距离l是时间的函数，变成

$$l(t)=\int_{t_i}^{t}v(t)\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

因此，与t时刻相对应的位置仍然是时间的函数$x(t)$

$$x(t)=x(t_i)+\int_{t_i}^{t}v(t)\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

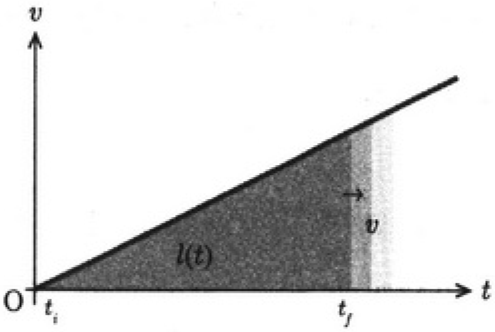
设位移$x(t)$满足$x(t_i)$=0，以位移为纵坐标、时间为横坐标，作图则如下所示。



◆ 时间随位置的变化

那么，当得知速度随时间变化的函数$v(t)$时，能够求得从t_i时刻到任意时刻t的时间段的移动距离$l(t)$的积分（2.3）也是时间的函数。

4 或者说任意的时刻。



当积分上限移动的时候所求的面积也会发生变化

◆ 求得从t_i时刻到任意时刻t的时间段内移动距离$l(t)$的积分

这里，将函数$l(t)$对t进行微分。根据微分定义可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{l(t+\Delta t)-l(t)}{\Delta t}$$

用含积分符号的式子替换$l(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\displaystyle\int_{t_i}^{t+\Delta t}v(t)\mathrm{d}t-\int_{t_i}^{t}v(t)\mathrm{d}t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\displaystyle\int_{t}^{t+\Delta t}v(t)\mathrm{d}t}{\Delta t} \tag{2.5}$$

它的极限趋近于$v(t)$。也就是说，变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l(t)=v(t)$$

可是由于函数$l(t)$是式（2.3）

$$l(t)=\int_{t_i}^{t}v(t)\mathrm{d}t$$

积分得到的函数再进行微分就回到原函数[5]。

与t时刻相对应的位置$x(t)$可以表示为

$$x(t)=x(t_i)+\int_{t_i}^{t}v(t)\mathrm{d}t$$

再一次将表示任意时刻的变量t设为t_f，两边都减去$x(t_i)$，左右边进行替换，则

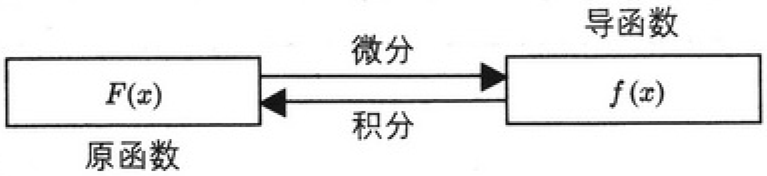
$$\int_{t_i}^{t_f}v(t)\mathrm{d}t=x(t_f)-x(t_i)$$

5 你可能会觉得这是理所当然的。有这种想法的你，或许对数学精通到已经没有读这本书的必要了，或许就是凭死记硬背来对待数学的。

这个式子表示的是，滑翔机在t_f时刻的位置$x(t_f)$减去t_i时刻的位置$x(t_i)$就可以得到t_i时刻到t_f时刻滑翔机移动的距离。这是当然的。但是，移动的距离是v–t图的面积。一方面，对位移进行微分即可得到速度这个量。图的面积和微分即可得到速度的位移这个量之间理应是没有任何关系的。但是可以用等号将他们连接起来，好像这里有很重要的关系呀。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)=f(t) \tag{2.6}$$

这里的$F(t)$称为$f(t)$的原函数。函数$F(t)$和$f(t)$的关系是，对函数$F(t)$进行微分就可得到导函数$f(t)$，对函数$f(t)$进行积分即可得到原函数$F(t)$。就像乘法和除法的关系一样，微分和积分是彼此的逆运算。



对函数$F(t)$进行微分就可得到导函数$f(t)$，对函数$f(t)$进行积分即可得到原函数$F(t)$

◆ 微分与积分互为逆运算

刚才的速度与位置的关系式

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t)\mathrm{d}t = x(t_f)-x(t_i)$$

用$f(t)$和$f(t)$的原函数$F(t)$分别替换$v(t)$和$x(t)$，用a和b分别替换t_i和t_f，则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a)\ .$$

这就是微积分的基本定理。

这个式子要表示的是，可以根据微分的逆运算（右边）求得函数的图形所包围的面积（左边）。


哎呀，终于摸索着走到这一步了。
到此为止说明的是关于微分和积分的微积分的基本定理。
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
这就是为什么我希望你们掌握微积分的基本定理的原因。
微分方程能够预知未来的关键就在这里。
这个定理可以说是人类的财富！
微积分的基本定理
啊！
不要再摆出一副完全不知所云的表情。
这也能看到!?
好好看看这个式子。
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
左边求面积的积分是着眼于全局的观点上成立的，与此相对应的是……
右边的原函数是着眼于图片上某一点的局部观点成立的。
……
……
啊。


这样也可以吗？大局观点和局部观点在现实世界中是完全不同的观点呀。
大局的观点
大局的观点，就比如说为了看某条河坐着滑翔机从上面俯瞰。
局部的观点
与此相对应的是，局部的观点是从河边观察眼前的河流。就是这样的意象。
诶？
也许这就是用等号联系……在一起的东西吧？
是这样的。
也就是说，现实世界中从河边如何细致地观察河流，
也看不到河流的全貌。
数学世界里积分的大局观点和微分的局部观点是联系在一起的。
这就是微积分的基本定理告诉我们的！

也就是说，在数学世界里只知道了函数，
就算不能从河边观察到什么，也能保证看到河流的全貌。
因此，在数学世界里，从滑翔机的某个瞬间速度就可以完全得知整个滑翔机的运动。
是呀！
可算明白了。
这就是……
能够预知未来的秘密！
那么，从下次开始学习典型的微分方程模型。
是！
好好努力吧！

微积分的基本定理的意思是，由函数的曲线形成的图形面积等于原函数中带入积分上限的值减去带入积分下限的值。用

$$[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

符号表示$F(b)-F(a)$，则化为

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$$

也就是说，只要知道了原函数，求函数图形的面积时就不用一一求极限，而是通过原函数的减法就可以求得[6]。这真是方便啊！

将函数$f(t)$的原函数用如下符号表示，则

$$\int f(t)\mathrm{d}t$$

这叫做不定积分[7]。与此相对应，求得由函数曲线形成的图形面积的积分为

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

这叫做定积分。就是说，微积分的基本定理将看似没有关系[8]的不定积分和定积分联系在了一起。

那么，假设$F(t)$为$f(t)$的原函数，C为任意常数，根据微分的性质可以得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(t)+C) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) + 0 = f(t)$$

$F(t)+C$也变成了$f(t)$的原函数。也就是说，不定积分变成

$$\int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C$$

常数C无法确定。这里的任意常数C叫做积分常数。由于积分常数无法确定，所以叫做不定积分。用曲线来表现的话，由不定积分得到的原函数的曲线平移之后肯定能够全部重合。

6 通过求极限计算积分在现实中是很难的。
7 注意这个名称哦。
8 这里不是指式子的形式，而是指其意义。

由于积分是微分的逆运算，因此将导函数的公式从相反方向读出即可得到不定积分的公式。

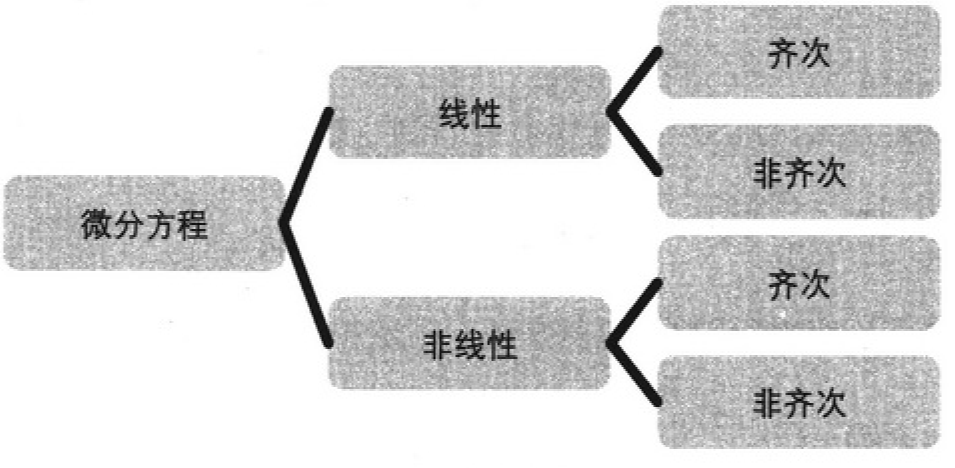
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^n=nt^{n-1}\rightarrow\int t^{n-1}\mathrm{d}t=\frac{t^n}{n}+C\ (n\neq 0)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t=\cos t\ \rightarrow\int\cos t\,\mathrm{d}t=\sin t+C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t=-\sin t\ \rightarrow\int\sin t\,\mathrm{d}t=-\cos t+C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t\rightarrow\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t+C$$

如何具体地解释微分方程是下一章要讲的内容，下面大致让大家看一下微分方程的分类，然后结束本章的内容。就像以前看到的那样，微分方程中只要引入导数，就会变成微分方程，如果不考虑分类的方法，无疑会杂乱无章、毫无秩序。对微分方程进行分类时，需要掌握根据自变量的个数、导函数的阶数和次数、线性和非线性、常系数和变系数、奇次和非齐次等微分方程的分类方法。



◆ 微分方程的分类

首先，我们从自变量的个数开始吧。一个自变量对应一个因变量的微分方程叫做常微分方程。有几个自变量的情况下，就要引入偏微分进行求导。含偏微分的方程叫做偏微分方程。本书只讨论常微分方程。到此为止，我们所见到的微分方程也全部都是常微分方程。由于不会出现偏微分，请把本书中提到的微分方程均视为常微分方程。

其次，方程的阶数和次数。微分方程中所含导函数的最大阶数称为微分方程的阶。

把这个导函数的次数称为微分方程的次数。导函数的次数表示的是导函数的幂数（乘几次）。也就是说，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=ka \quad \leftarrow \text{一阶一次微分方程}$$

由于含一阶导函数，它的次数为一次，因此被分类为一阶一次微分方程。另外，在

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0 \quad \leftarrow \text{二阶一次微分方程}$$

中，虽然导函数既有一阶导函数又有二阶导函数，但是根据最大阶数才是微分方程阶数的规则，它就是二阶，这个导函数的次数为一次，因此就被分类为二阶一次微分方程。

再次，就是线性与非线性的分类。线性微分方程就是因变量和它的导函数的次数为一次的微分方程。若含有不是一次的项，就是非线性微分方程。以刚才的微分方程为例

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=ka \quad \leftarrow \text{线性微分方程}$$

和

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0 \quad \leftarrow \text{线性微分方程}$$

由于因变量和它的导函数的次数是一次，因此都属于线性微分方程。

随后，是常系数和变系数的分类。线性微分方程的系数全部为常数时称为常系数微分方程，若系数是变量，就称为变系数微分方程。比如说

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0$$

虽然是变系数微分方程，但

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+7x=0$$

却是常系数微分方程。

最后，是齐次和非齐次的分类。线性微分方程的情况下，与因变量没有关系的常数为0时，称为齐次微分方程，不为0时叫做非齐次微分方程。比如说

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=ka$$

就是非齐次微分方程。

而

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0$$

为齐次微分方程。

对微分方程进行分类时，要综合使用上述这些分类方法。比如说

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0$$

就是二阶一次变系数齐次线性常微分方程。这么长的名字确实有点啰嗦，实际上，可以根据具体情况进行省略。这一点在处理具体微分方程时要注意。

本书分别在第三章讨论可分离变量一阶齐次微分方程，在第四章讨论一阶非齐次线性微分方程，在第五章讨论二阶线性微分方程。

本书要处理的微分方程实例如下。

阶 数	种 类	计算公式	说 明	章 节
一阶	齐次线性	$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\mu P$	描述北海道鹿生存数字变化的微分方程	第三章
	非齐次线性	$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-6\pi\eta rv$	考虑重力和黏性阻力的情况下的运动方程	第四章
二阶	齐次线性	$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0$	考虑弹力和阻力的振动体系的运动方程	第五章
	非齐次线性	$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=F_0\cos\nu t$	包含外力的振动体系的运动方程	第五章

第3章

可分离变量微分方程

——北海道鹿王国能实现吗?


这家伙又来数宫神社啦……
保佑我的店铺生意兴隆！
据说是开韩式烤肉店的
啪
啪
嗯！有了……
要不，教学的事情先放一放……
女神！
又做这种事，不要忘了正事！
好奇怪的神仙啊……
都说了不是我的专业啦！
你这个家伙要得到惩罚的！
变态了
啊……好疼……
对不起啊！！
如果能把这个完成的话，我也想实现一下大家的愿望，
但是我也不是万能的呀！
全都得努力呀！
不是说不专业吗。
……诶？


什么？
没什么，
我原来认为所谓的神仙只是抽象的存在……
神仙能够更加具体地帮助人们实现他们的愿望。
好亲切的神仙姐姐呀……
啊……说什么呀……
我也只是在做自己份内的工作而已！
偷懒是因为那儿的女巫实在是太烦人了！
讨厌！
今天我们计划对微分方程进行一些改变。
马上开始吧！
喂！快点走吧！
这些人，
完全不知道神仙的辛苦啊！
水木，今天还是那么神啊！
是啊……

1. 现象


这个点心真是好好吃啊!
啊呜啊呜啊呜……
味道真不错啊!
车站前面开了一家北海道的零售店铺，就买了些点心。
那里卖的软冰淇淋真是绝了!
真想去啊!
美极薯条
精选新鲜出炉的优质土豆
今天，我想试着解释一下递增和递减的现象。
我们用可分离变量微分方程做一个模型。
……那么，
其他的呢?
嗯……
递增和递减……
这些东西吗?
是啊。
还是先学习吧。
啊……知道啦。


……怎么一下想不起来了呢……
太愚钝了。
好啦好啦……
没事没事……
抱歉啊……
……这么说来，
特产
北海道鹿剧增都好像要成为一个问题了。
鹿是神的使者呀。
真的？
北海道鹿
北海道鹿吗？
什么问题呀？
食物逐渐减少，所以应该不会剧增吧？
鹿的
据说树木和旱田都荒废了。
据说，北海道鹿增加是因为捕食北海道鹿的北海道狼在十九世纪极度减少所致……
北海道狼
北海道狼
是吗……


若真是那样的话！
今天我们就建一个解释北海道鹿数量增加现象的模型吧！


好
好啊！
这套东西又出来了！
现实世界
数学世界
现象
北海道鹿数量增加
模型化
模型
计算
解
解释
现象的说明
应用

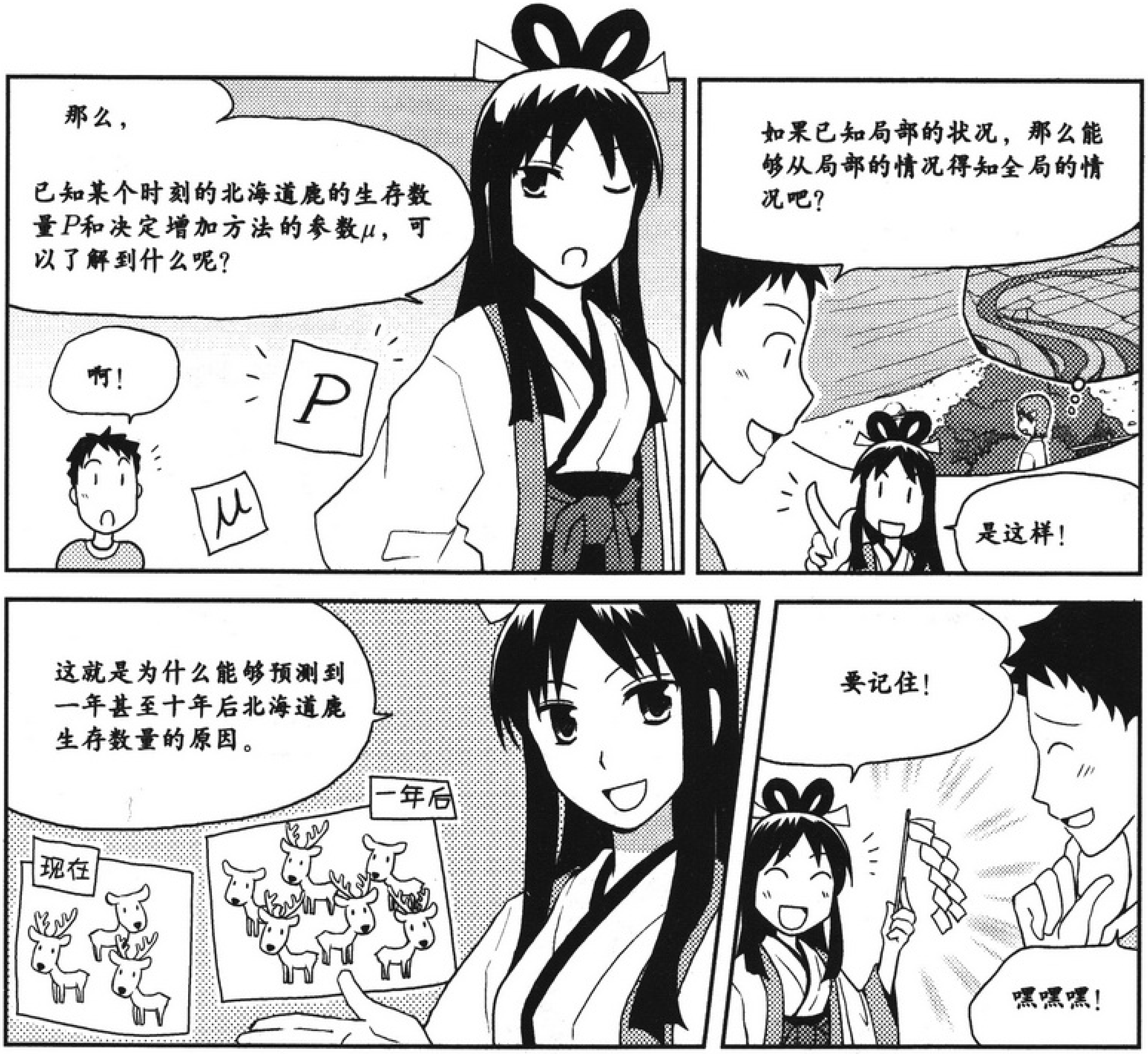
2. 模 型


首先还是要模型化。
你认为应该建立怎样的模型呢？
现象
北海道鹿数量的增加
模型化
嗯……
还不知道到底怎么做呢……

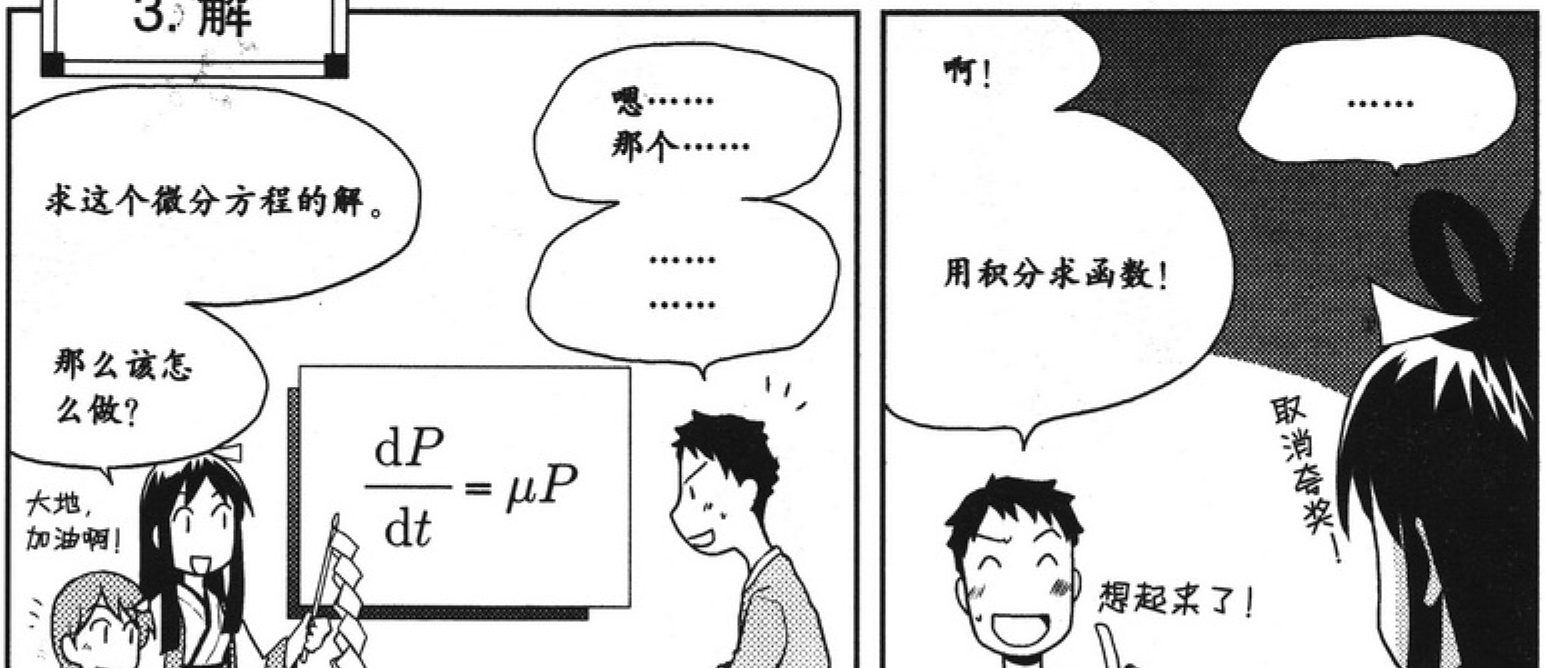

那个……
我对于北海道鹿的事情不太熟知……
北海道鹿是名贵的鹿……
那么痛苦地在思考什么呢？
新生鹿的数量减去死去的鹿的数量就能够得到增加量。
诶？
是这样吗？
是啊，
让我们想象一下增加的方法吧。
一只雌性北海道鹿夏初只生产一只小鹿。
母
子
虽然并不是所有的北海道雌鹿都能产子，但是所有能存活下来的小鹿的数量，
大致与北海道鹿的总数成正比。
嗯。
并且死亡的北海道鹿的数量也与北海道鹿的总数成正比。
这样考虑也太粗略了吧……
首先从简单的开始考虑！


我们考虑北海道鹿的增加量与北海道鹿的数量成正比。
10头北海道鹿的群里，死亡1头，新生5头的话。
10头
1头
5头
100头北海道鹿的群的话，应该是每年死亡10头，新生50头。
原来如此……
时间
t
北海道鹿的生存数量
P(t)
这里，设时间为t，北海道鹿的生存数量为$P(t)$，
那么可以假设北海道鹿生存数量的增加率$\mathrm{d}P(t)/\mathrm{d}t$与北海道鹿生存数量$P(t)$成正比的模型。
用式子表示，设比例常数为μ……
比例常数
μ
顺便说一下，确定这个函数关系的变量叫做参数，也叫媒介变量。
参数
媒介变量
μ
明白了。
那么，式子就变成这样。

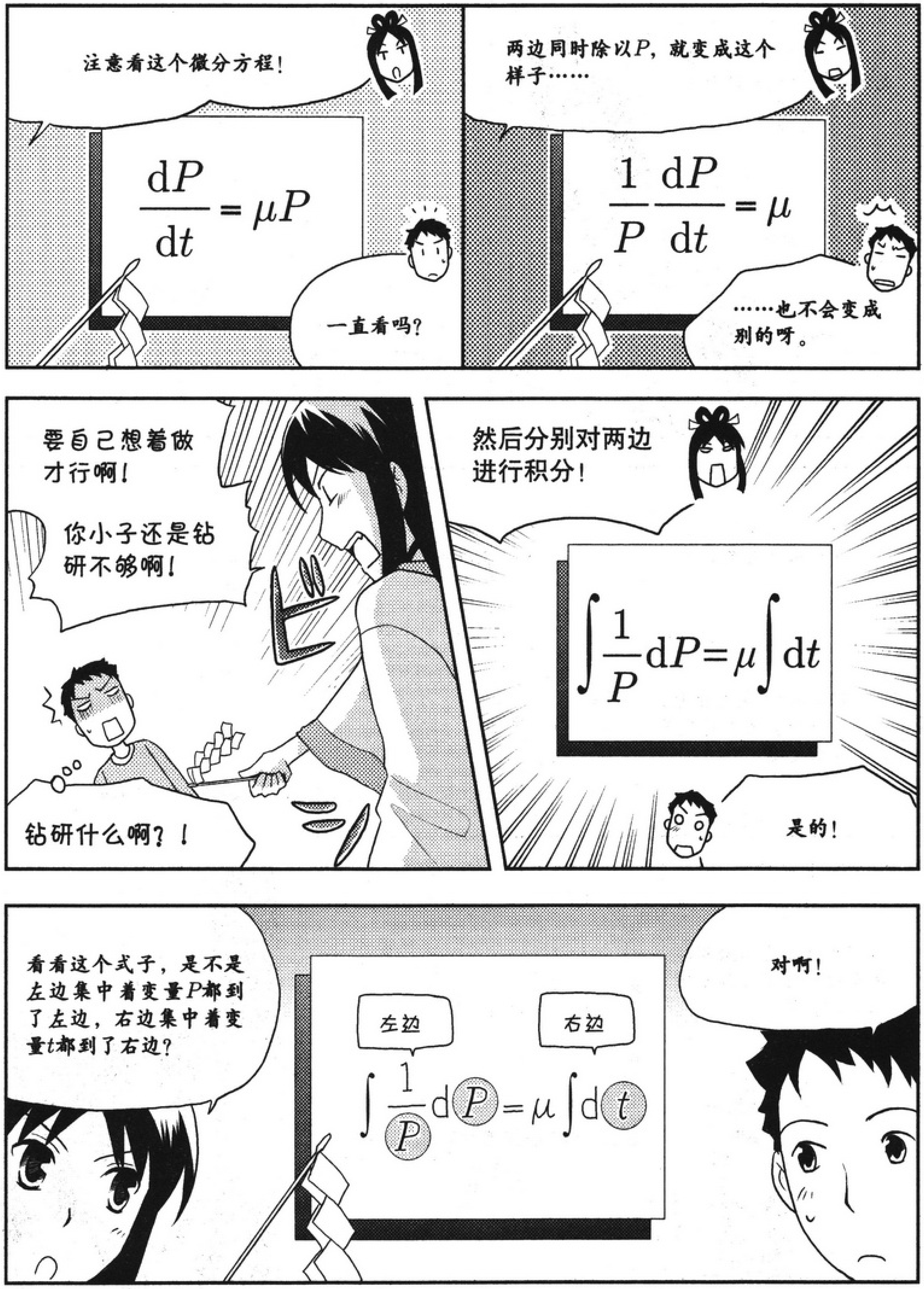

啊，做出来了！
看
现 象
北海道鹿的数量增加
模型化
模 型
$\frac{dP}{dt}=\mu P$
计算
解
解释
现象的说明
应用
哦
那么，这就是……
模 型
$\frac{dP}{dt}=\mu P$
描述北海道鹿生存数量变化的微分方程！
噢！
顺便问一句，比例常数μ该怎么弄呢？
μ
那个……
调查一下现实世界的情况才能知道啊！
哈哈哈……
μ


那么，
已知某个时刻的北海道鹿的生存数量P和决定增加方法的参数μ，可以了解到什么呢？
呵！
P
μ
如果已知局部的状况，那么能够从局部的情况得知全局的情况吧？
是这样！
这就是为什么能够预测到一年甚至十年后北海道鹿生存数量的原因。
现在
一年后
要记住！
嘿嘿嘿！

3. 解


求这个微分方程的解。
那么该怎么做？
嗯……
那个……
……
……
$\frac{dP}{dt} = \mu P$
大地，加油啊！
呵！
……
用积分求函数！
想起来了！
取消夸奖！

现在，我们的目标是求北海道鹿的生存数量关于时间的函数。
也就是解微分方程。
不好意思……
P
t
0
那么，将北海道鹿的生存数量P随时间t的变化做成曲线，则变成这样。
那个……横坐标是自变量，纵坐标是因变量……
因此时间t是自变量，北海道鹿的生存数量P是因变量。
P
因变量
自变量
t
0
我们现在首先需要确认的是这些变量在微分方程里的位置。
$\frac{dP}{dt}=\mu P$
因变量
自变量
是！
所以说，
从现在开始讲的内容都是非常重要的！



注意看这个微分方程！
$\frac{dP}{dt}=\mu P$
一直看吗？
两边同时除以P，就变成这个样子……
$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}=\mu$
……也不会变成别的呀。
要自己想着做才行啊！
你小子还是钻研不够啊！
钻研什么啊？！
然后分别对两边进行积分！
$\int\frac{1}{P}dP=\mu\int dt$
是的！
看看这个式子，是不是左边集中着变量P都到了左边，右边集中着变量t都到了右边？
左边
右边
$\int\frac{1}{P}dP=\mu\int dt$
对啊！

总结计算过程如下。

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\mu P$$

两边同时除以P

$$\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\mu$$

进行积分

$$\int\frac{1}{P}\mathrm{d}P=\mu\int\mathrm{d}t$$

左边是公式。
$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

$$\int\frac{1}{P}\mathrm{d}x=\ln|P|+C_1 \qquad \mu\int\mathrm{d}t=\mu t+C_2$$

把积分常数综合为一个，就变成这样。

$$\ln|P|=\mu t+C$$

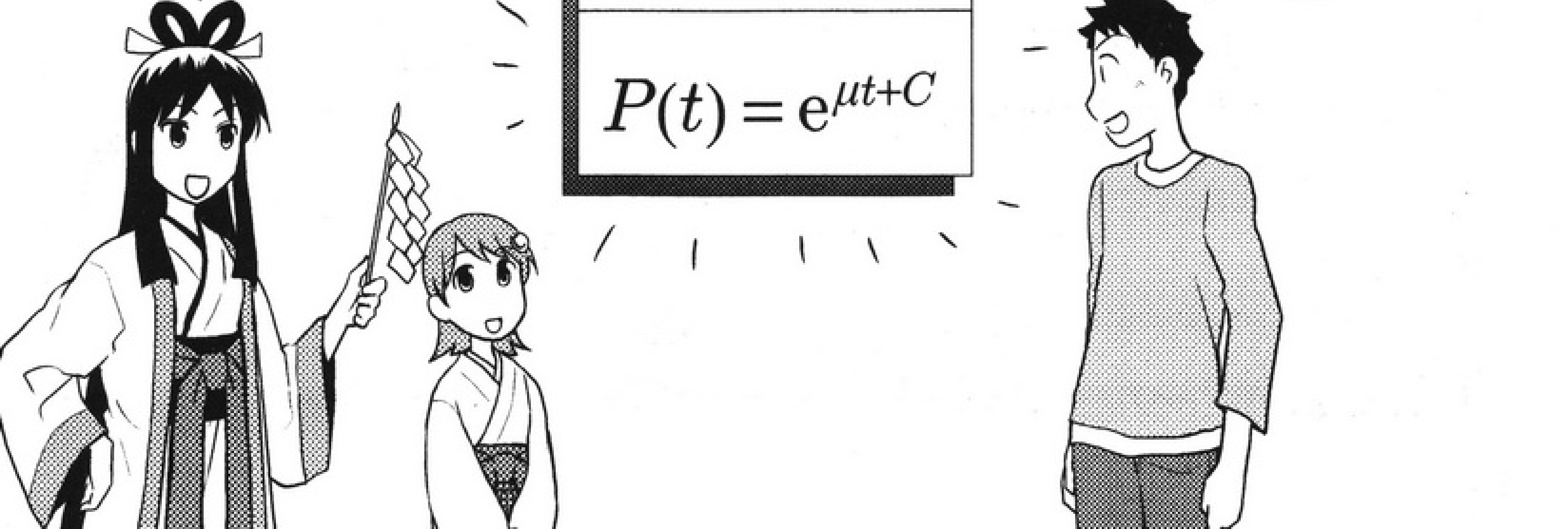
求解P

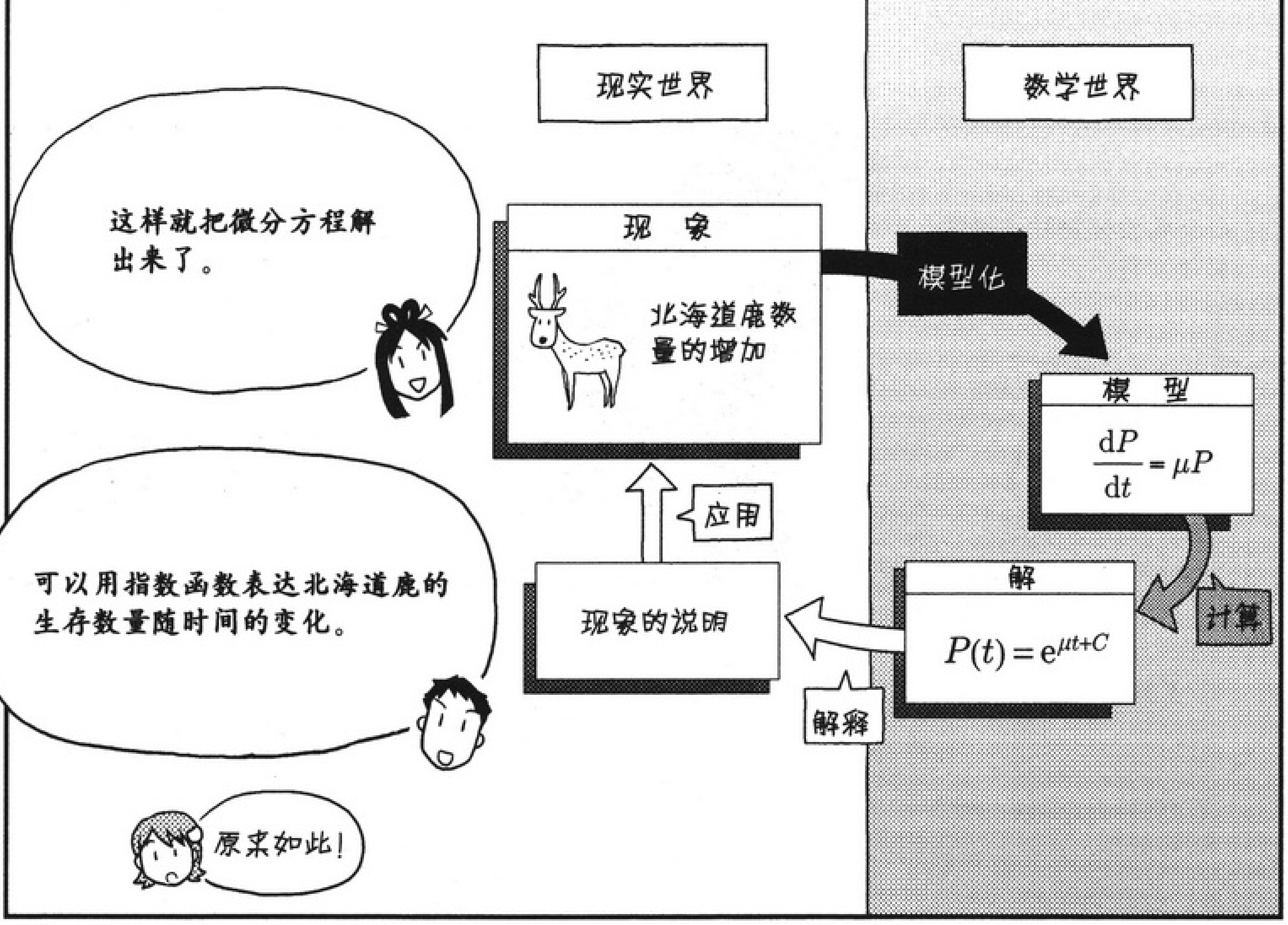
由于P表示的是北海道鹿的生存数量，因此要注意通常P是大于0的。

噢！
函数出来了！

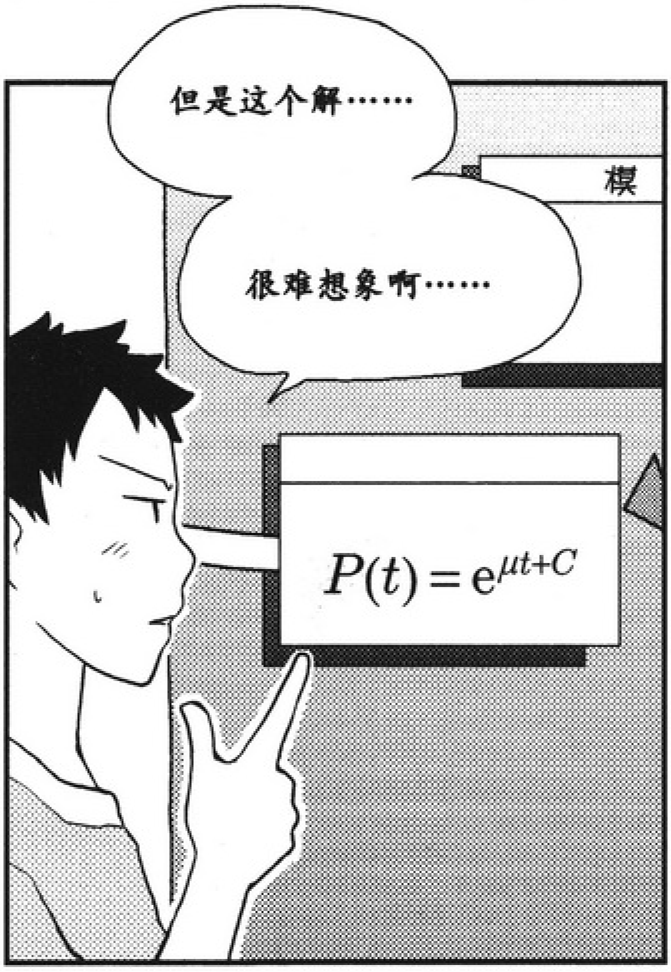
微分方程的解

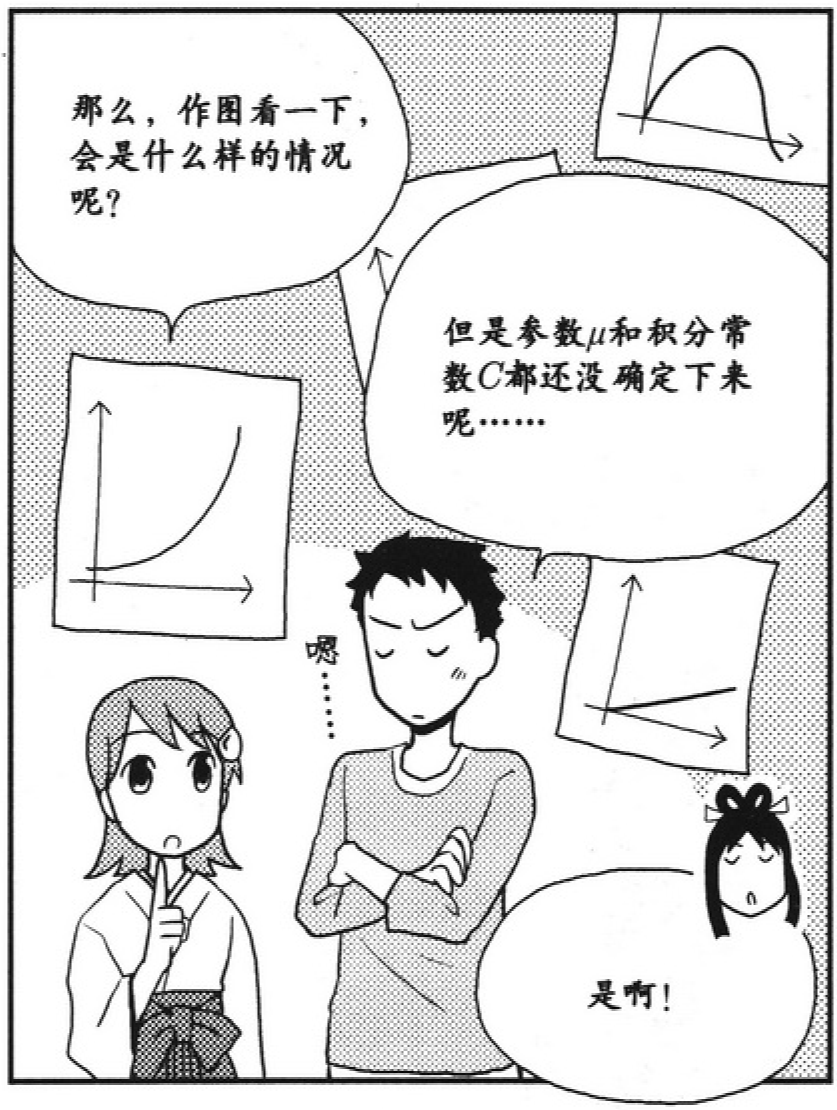
$$P(t)=\mathrm{e}^{\mu t+C}$$




现实世界
数学世界
现　象
北海道鹿数量的增加
模型化
模　型
$\frac{dP}{dt}=\mu P$
计算
解
$P(t)=e^{\mu t+C}$
解释
现象的说明
应用
这样就把微分方程解出来了。
可以用指数函数表达北海道鹿的生存数量随时间的变化。
原来如此！

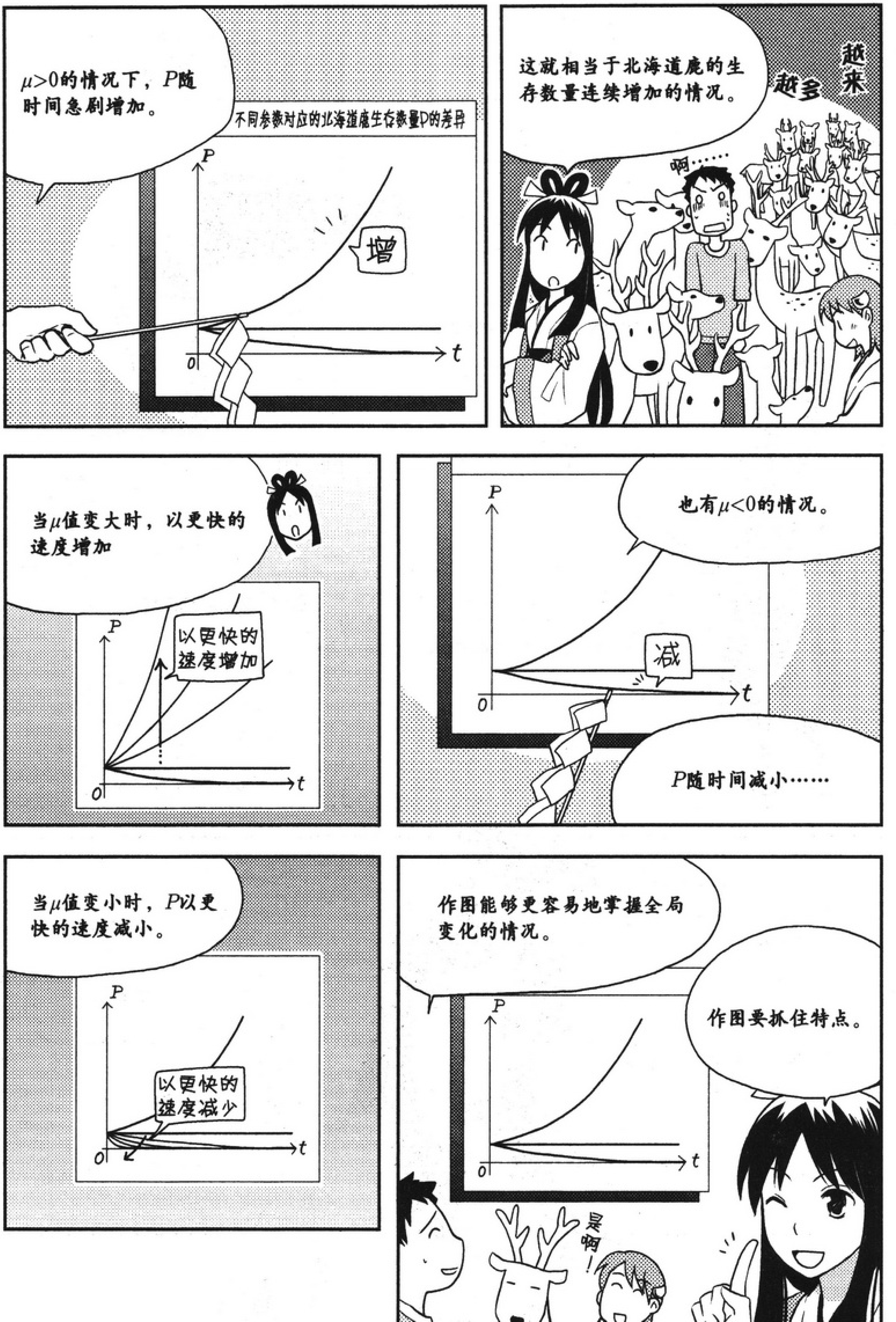
4.解　释


但是这个解……
很难想象啊……
模
$P(t)=e^{\mu t+C}$

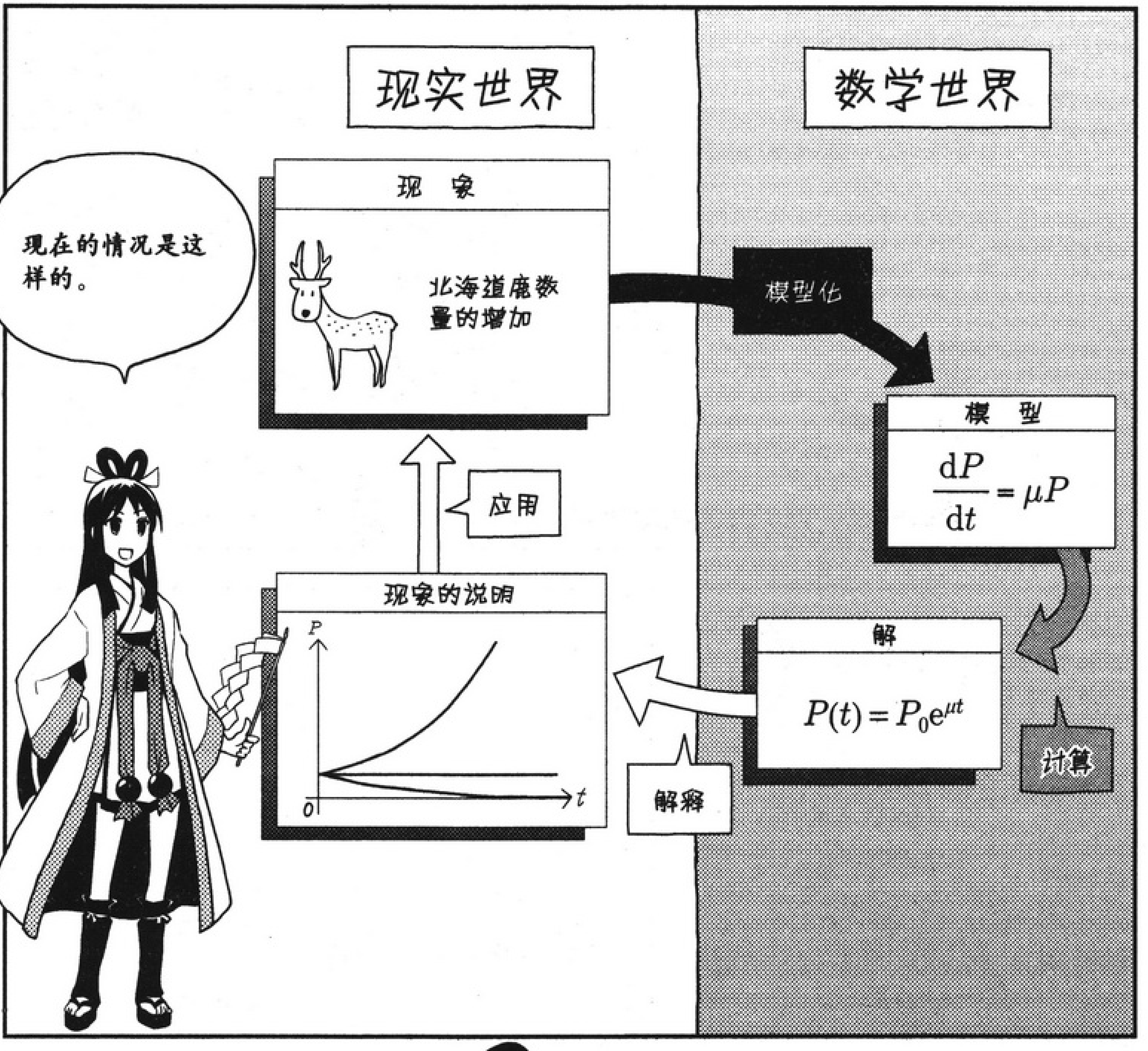

那么，作图看一下，会是什么样的情况呢？
但是参数μ和积分常数C都还没确定下来呢……
嗯……
是啊！


无法具体地描述这个事情，
所以倒不如做无限多个图表。
无限多个图表
哇……
如果不对现实世界的情况进行调查，就不知道参数应该取什么值，积分常数也是一样的情况。
因此有必要调查一下现实世界的情况。
为调查积分常数，令t/0。
$t = 0$
把t/0代入微分方程的解中。
$P(0) = e^C$
该常数表示t/0时北海道鹿的生存数量。
这样的话，
$P_0 = e^C$
北海道鹿生存数量的函数P（t）就是……
$P(t) = e^{\mu t + C}$
$= e^C e^{\mu t}$
$= P_0 e^{\mu t}$
可以写成这样。

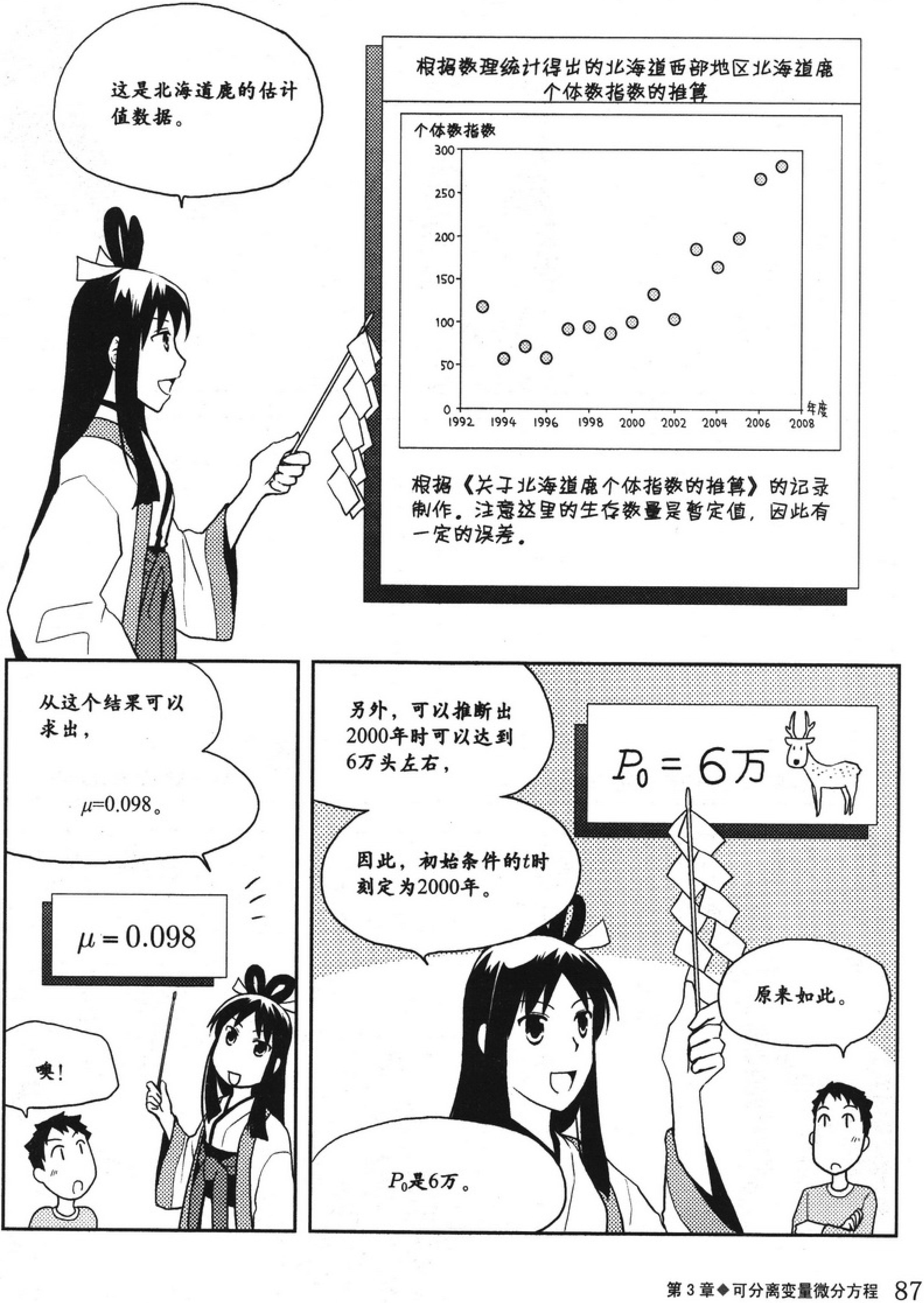
像P_0一样，t=0时刻的值叫做初始条件。
虽然，未必能够使用t=0时刻的值。
$P(t)=P_0e^{\mu t}$
大概考虑到利用微分方程，由一开始时某个时刻的局部状况预测全体的情况。
使用初始条件的情况较多。
$P(t)=P_0e^{\mu t}$
是啊。
已知积分常数由初始条件决定，
因此我们假设初始条件P_0和比例常数μ。
做北海道鹿的生存数量P随时间t变化的曲线。
μ=0时，P不随时间变化，保持t=0时刻时的值P_0不变。
参数不同时北海道鹿生存数量P的差异
P
没有变化。
t
0
指数部分是0，因此不随时间发生变化。



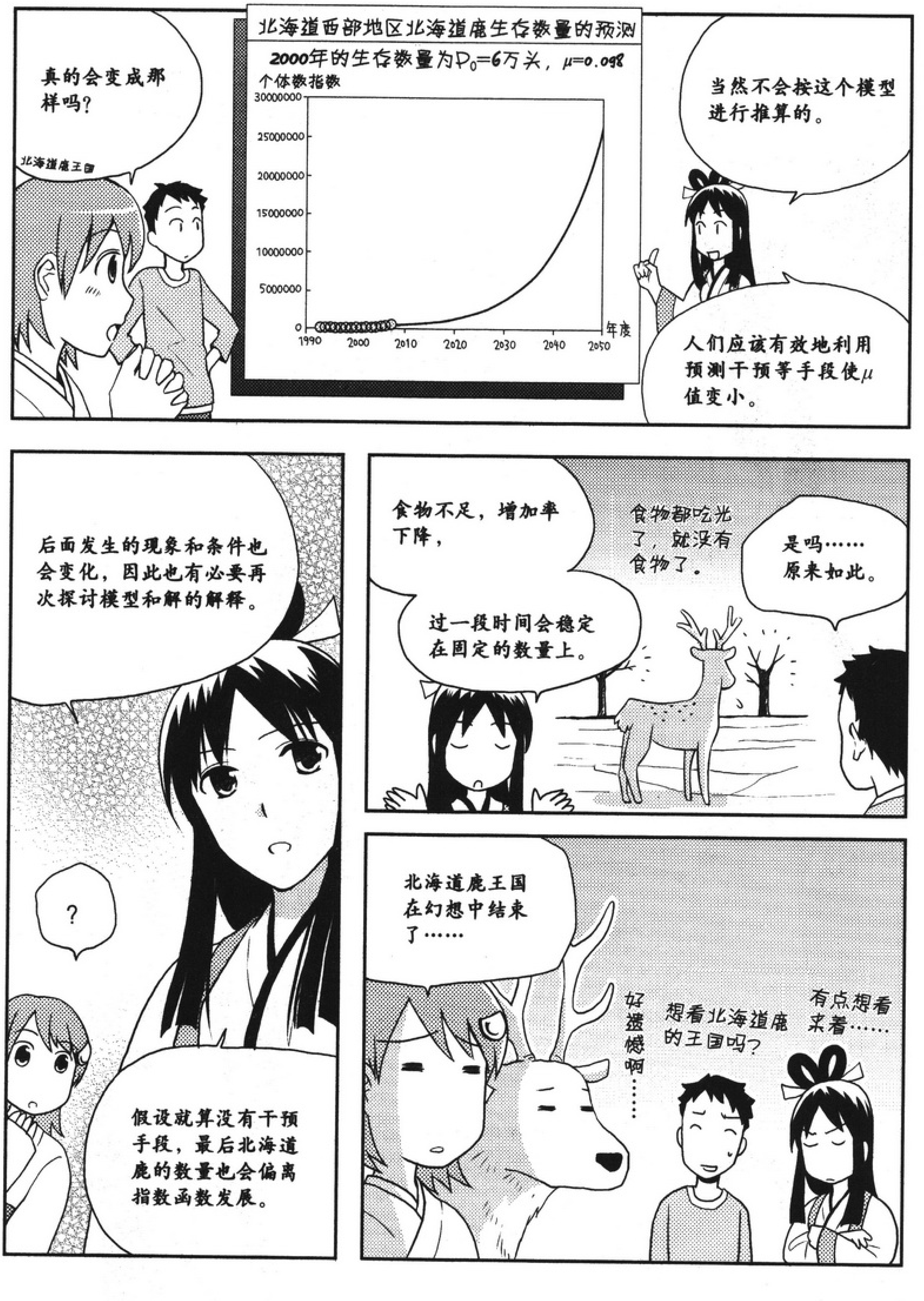
μ>0的情况下，P随时间急剧增加。
不同参数对应的北海道鹿生存数量P的差异
增
这就相当于北海道鹿的生存数量连续增加的情况。
越来越多
啊……
当μ值变大时，以更快的速度增加
以更快的速度增加
也有μ<0的情况。
减
P随时间减小……
当μ值变小时，P以更快的速度减小。
以更快的速度减少
作图能够更容易地掌握全局变化的情况。
作图要抓住特点。
是啊！


现实世界
数学世界
现在的情况是这样的。
现 象
北海道鹿数量的增加
模型化
模 型
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P$
计算
解
$P(t) = P_0 e^{\mu t}$
解释
现象的说明
P
t
0
应用


那么，从现实中北海道鹿的数量，调查初始条件P_0和参数μ，
然后推算并预测一下今后北海道鹿的数量。
好的！


这是北海道鹿的估计值数据。
根据数理统计得出的北海道西部地区北海道鹿个体数指数的推算
个体数指数
300
250
200
150
100
50
0
1992
1994
1996
1998
2000
2002
2004
2006
2008
年度
根据《关于北海道鹿个体指数的推算》的记录制作。注意这里的生存数量是暂定值，因此有一定的误差。
从这个结果可以求出，
μ=0.098。
$\mu = 0.098$
噢！
另外，可以推断出2000年时可以达到6万头左右，
$P_0 = 6$万
因此，初始条件的t时刻定为2000年。
原来如此。
P_0是6万。

如果以这样的发展速度持续增加，可以预测出大概7年左右就变成两倍！
7年
没有那么容易的事儿吧？
7年就变成两倍……
真的会这样吗？
北海道西部地区北海道鹿生存数量的预测
2000年的生存数量是6万头，μ=0.098
个体数指数
年度
2020年就变成42万……
2050年变成798万，2100年就变成11亿。
个体数指数
噌，噌
激增
年度
下个世纪就是北海道鹿王国了！
北海道鹿王国
不要小看指数函数，
如果这个模型能够解释这个现象的话，
街上到处都是北海道鹿！
你好
呵呵……
什么！这种印象？
你好


真的会变成那样吗？
北海道鹿王国
北海道西部地区北海道鹿生存数量的预测
2000年的生存数量为P_0=6万头，μ=0.098
个体数指数
30000000
25000000
20000000
15000000
10000000
5000000
0
1990 2000 2010 2020 2030 2040 2050
年度
当然不会按这个模型进行推算的。
人们应该有效地利用预测干预等手段使μ值变小。
后面发生的现象和条件也会变化，因此也有必要再次探讨模型和解的解释。
?
假设就算没有干预手段，最后北海道鹿的数量也会偏离指数函数发展。
食物不足，增加率下降，
过一段时间会稳定在固定的数量上。
食物都吃光了，就没有食物了。
是吗……原来如此。
北海道鹿王国在幻想中结束了……
好遗憾啊……
想看北海道鹿的王国吗？
有点想看来着……


不管怎样，
也不可能预测一次就解决问题。
需要验证从模型预测到的结果能否很好地解释现实中的现象。
遇到不适用的状况时，有必要进行再探讨。
知道了。
这部分比较难，再看看别的例子吧！
好的。

5.马尔萨斯法则

把现实世界的现象模型化并带入数学世界时，人们采取了算式这样一种抽象的表现方式。令北海道鹿的生存数量为P，时间为t，则通过微分方程

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\mu P$$

表现了北海道鹿生存数量的增加率 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 与北海道鹿生存数量P成正比的模型。

是啊！

但是，在抽象化的数学世界里，用P表示北海道鹿的生存数量，完全不能让人产生兴趣呀。

总感觉既没有乐趣也不讨人喜欢……

根本不是那样的！总之，若是完全适合的现象，用同一个微分方程表现的模型也可以解释P到底表示的是什么。现在这种情况下，若$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$与P成正比，P表示什么都可以。

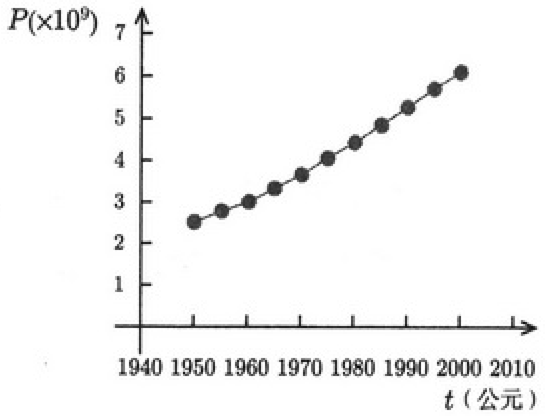
“世界人口”和“热门商品的普及率”是这样吗？

“细菌的增殖过程”也是。任何一个数的增加率与这个数本身成正比，能够用这个说法解释的现象有很多。

世界人口持续增加，这个现象被人们所熟知。

世界人口大爆发等……

实际上，成为问题的并不是人口的持续增加，而是人口的指数函数式增加。极端点说的话，就算世界人口只是指数函数式增加，也并不会成为问题。成为问题的是人类生存所需要的资源并没有指数函数式地增加。



世界人口正在呈指数函数式增加

◆ 世界的人口[1]

资源不足是理所当然的。

是啊。比如说，人不吃东西是无法生存的，但是食物的生产并没有呈指数函数式增加。若要使食物生产像人口增加一样指数函数式地增加，则需要增加好几倍的时间。一方面，通过增加旱田和牧场的面积等食物增产方法，能够提高生产效率，但是成倍地增加旱田或者牧场的面积是很难办到的。

确实如此！

即使拼命努力，在某个时期内也只能增加到一定的程度[2]。成倍地提高生产效率是更难的事情。也就是说，人口的增长方式和食物的增加方式有本质的不同，减少的不只是每个人的食物，而是随时间的推移，会急剧地减少[3]。

这样下去，横竖都要陷入饥饿状态[4]。

最初提出人口增长方式与食物增加方式不同之处的人就是马尔萨斯。

马尔萨斯……先生？

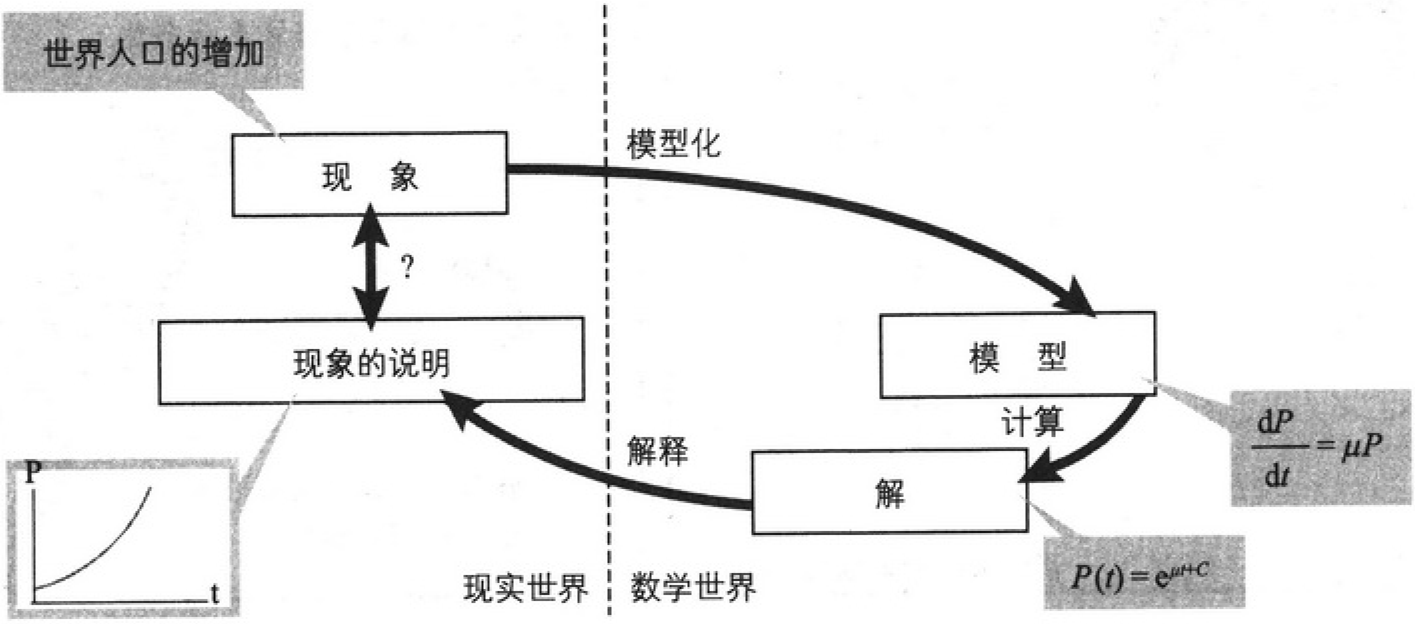
---

1 数据出处：联合国，世界人口展望，2008修订版。

2 虽然人们感觉好像还有很多土地，但是能够利用的土地实在是出乎意料地少。另外，即使有土地，也会有水、日照、气温等方面的问题。

3 也有等比级数式变化和等差比数式变化。成倍增加的是等比级数式的变化，增加恒定量的是等差级数式的变化。

4 不是哪一个区域，而是根据地域的不同或许已经预先设定好了。看看现在世界的状况就可以了解到，不是全世界都同时进入饥饿状态，而是从贫穷的区域开始进入饥饿状态。



◆ **世界人口增加的现象**

马尔萨斯法则的内容为：人口的增加率dP/dt与人口P成正比。这个模型是，令时间为t，人口为$P(t)$，那么，这个模型是人口的增加率dP/dt与人口$P(t)$成正比。比例常数为μ，则微分方程为

$$\frac{dP}{dt}=\mu P \qquad \leftarrow \text{表示人口增加的微分方程}$$

参数μ叫做增殖率，也叫马尔萨斯径数[5]。

像细菌这类微生物也是这样，在单位时间里个体的增加率dP/dt与个体数P成正比。写成微分方程的话，仍然是

$$\frac{dP}{dt}=\mu P \qquad \leftarrow \text{表示细菌个体数量增加的微分方程}$$

细菌的增加速度好像非常地快。

当然，与人口相比，细菌的数量可以说瞬间增加，因此细菌的增殖率μ与人口相比是非常大的数值[6]。

5 注意径数是参数，而不是系数。
6 若大肠杆菌处于成倍增长的对数增殖期，在条件适合的情况下20～30分钟的时间内就会成倍地增加。这个时间叫做世代时间。


完全不同的现象背后的法则确是相同的！
模 型
$\frac{dP}{dt}=\mu P$
因为这里的每个都能表示个体数的变化。
$\frac{dP}{dt}=\mu P$
虽然用同一个模型表示，也不会有不协调的感觉。
表示磁场的磁力线和表示液体流动的流线也可以用相同的微分方程表达，
诶？
我们看看这个例子。
磁力线的例子
N
S
N
S
流线的例子
怎么样？很有趣吧！
好的。
可分离变量微分方程是最基本最重要的内容，因此自己反复练习求解才可以哟！
真是非常感谢你。
神仙姐姐！


……嗯，
那就算了。
好好努力哟！
！！
……嘿嘿
?
有什么好笑的？
没啥，
就是挺高兴的。
精力充沛啊。
别笑了。
什么？
真是奇怪的家伙……
「好，我要努力！」
呵呵

6. 核衰变

■ 现　象

北海道有北海道鹿等众多野生动物，但是众所周知，人类生存的历史也较长。各地都有遗址被发现，其中甚至有一万年前旧石器时代的遗物。但是，如何才能知道这些遗迹是一万年以前甚至更久的东西呢？考古学中，虽然可以通过积累地层的顺序（地层序）、树木的年轮等多种证据推断年代，但在这些方法中最强有力的方法是利用放射性物质的衰变速度来测定年代[1]。

提起放射性物质，总让人感觉存在着一股危险的气息，但是实际上自然界也有恒定比例的放射性物质存在，平常在我们的身边也存在[2]。年代测定中，经常使用的物质是碳元素，它是组成包括我们人类在内的所有生物身体的基本元素之一。

形成我们身体的碳元素追根究底是植物通过光合作用从空气中的二氧化碳吸取的。植物在吸取碳元素的时候，如果释放出与时钟相关联的东西，就可以得知这个植物生存的年代。另外，动物的生存要靠食用吸取碳元素的植物，也就是说，可以大概推测食用这些植物的动物（还有食用这些动物的动物）生存的年代，但是在这些碳元素中，能够那么巧合地发现类似时钟的东西吗？答案是肯定的。

作为碳元素同位素[3]的${}^{14}_{6}C$[4]，${}^{14}_{6}C$是宇宙中发射的放射线与上层空气发生碰撞所产生的中性粒子，与空气中的氮元素${}^{14}_{7}N$反应的产物。产生的碳元素${}^{14}C$与氧气（O_2）发生化合反应变成二氧化碳（CO_2），在大气中扩散。

顺便说一句，这个${}^{14}C$不能长时间稳定地存在。最终会发射放射线，变成其他的元素[5]。不仅限于${}^{14}C$，发射放射线变成其他元素的现象叫做核衰变，发生核衰变的同位素叫做放射性同位素。放射性同位素按照恒定的概率进行衰变。由于发生核衰变变成其他元素，所以原来的放射性同位素的数量（若不重新供给的话）会减少。

---

1 除此之外还有热冷光法、电子回旋共鸣法等，但是考虑方法基本相同。

2 当然也有人工的放射性物质。另外，即使是原本在自然界中存在的放射性物质，含量大时也会有危险。不仅限于放射性物质，即使是存在于自然界中的化学物质也不能说是安全的。

3 相同元素的质量数不同的原子，也叫放射性同位素。原子核中的质子数相同，中子的数量不同。

4 质量数为14的碳元素。常见的碳元素是${}^{12}_{6}C$，质量数为12。顺便说一下，碳元素的原子序数为6。

5 发射β射线（高能量电子）变成${}^{14}N$。

原有的放射性同位素的原子经过衰变之后变成原来一半的时间间隔叫做半衰期[6]，根据放射性同位素的不同而数值不同。^{14}C的半衰期是5730年。即使^{14}C与O_2发生化学反应变成CO_2，被植物和动物摄取（这也是化学反应），也会发生核衰变，若不提供新的碳元素，^{14}C经过5730年之后就变成原来的一半。

但是，就像刚才所说，地球上的^{14}C是从上层空气经常性地供给，而经过衰变数量减少的话，供应的数量就会相应地增加以保持一定的比例，因此大气中（以CO_2的形式）存在的^{14}C的量是大致不变的[7]。也就是说，大气中的^{14}C和^{12}C的比例是恒定的[8]。

由于含^{14}C的CO_2和含^{12}C的CO_2的化学性质完全相同[9]，因此无区别地被植物吸收进行光合作用。正在进行光合作用的植物细胞所含的^{12}C和^{14}C之比与大气中的比例应该是相同的。也就是说，植物细胞在进行光合作用的时候，其细胞内的^{12}C与^{14}C的比例也是恒定的。

但是，当植物细胞不进行光合作用的时候，就没有大气给植物提供^{14}C，因此^{12}C对^{14}C的比例会减小。也就是说，当植物不能吸收碳元素的时候，就会放出类似时钟的东西。不能进行光合作用的理由可以考虑为枯萎、变成木质[10]、被动物吃掉等。不管是动物还是植物，通过调查生物遗体内所含^{12}C与^{14}C之比就可以得知光合作用是何时停止的。

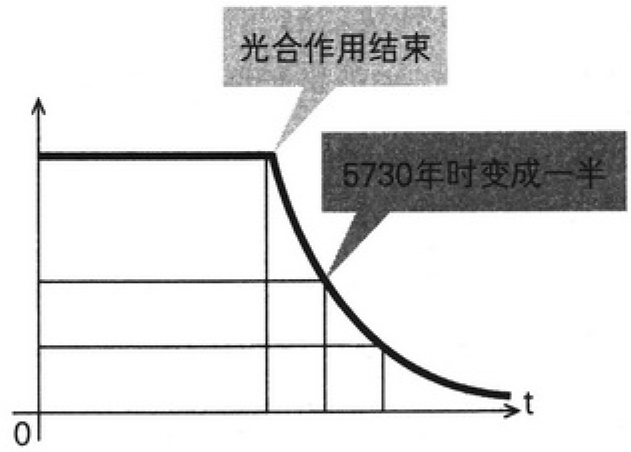
6 有些放射性同位素的半衰期仅仅是一瞬间，而占天然铀元素大部分的铀238($^{238}_{92}$U)的半衰期有45亿年之长。顺便说一下，用于核电和核武器的铀235($^{235}_{92}$U)的半衰期是7亿年。

7 在上升的自动扶梯上向下行时，如果速度相同，就始终处于同一高度，与这件事情是相同的道理。但是好孩子是不会那样模仿的。

8 严密地说也不是恒定的。为此，年代测定的正确性受到质疑，关于推测年代的讨论也是此起彼伏。

9 物理性质不同。比如说质量是中子的两个大小，因此扩散速度要慢一些。

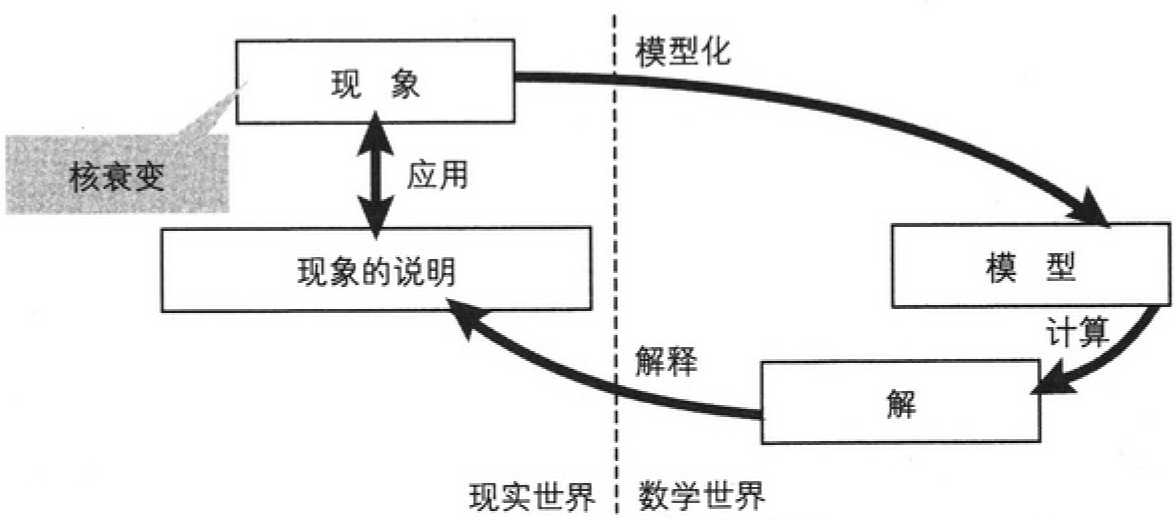
10 越靠近树木年轮的内侧^{14}C的比例就越小。



直到光合作用结束为止是恒定的，但是光合作用结束之后每过5730年就会减少为原来的一半。相反，若得知^{12}C与^{14}C之比，就能得知光合作用是何时停止的。

◆ 生物体内所含^{12}C与^{14}C之比

虽然刚才说到，放射性同位素按照恒定的概率进行衰变，但是如果只观察某个放射性同位素的一个原子，说实话现在还不能得知这个原子何时开始进行核衰变。虽然现在不行，也许在更遥远的未来有可能得知。某个原子进行衰变的时机是随机的。不管是与^{14}C种类相同的放射性同位素中的哪个原子，若继续观察，都是以相同的概率进行衰变，这一点是可以确定的。即使仅仅观察一个原子，也不能预测该原子从何时开始衰变的，但是当观察很多个原子的情况下，可以预测到随着时间的推移会有恒定比例的原子开始衰变。也就是说，原子数的变化率（衰变速度）与原子数成正比。诶？好像是在哪儿见过的词汇啊。对了，是漫画页中对北海道鹿的生存数量$P(t)$的增加率$dP(t)/dt$与北海道鹿的生存数量$P(t)$成正比的模型进行的假设。这里也要相同地把核衰变模型化之后带入数学世界。



放射性同位素衰变现象的说明。

◆ 核衰变的说明

■模　型

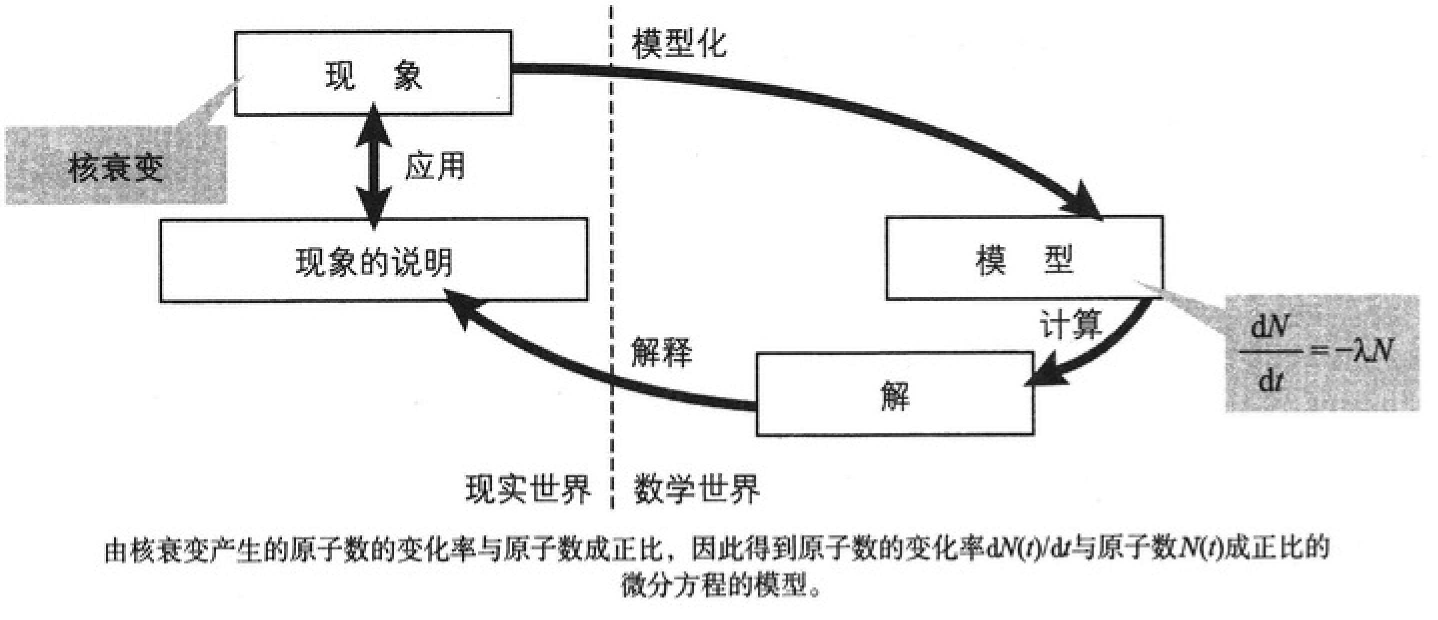
那么，试着做一个说明放射性物质衰变的模型。模型化的时候需要留意的是即使不知道这种现象为什么发生也没有关系[11]。当然，想要知道为什么不能预测某个原子从何时开始衰变的机理的这种心情是可以理解的。知道的感觉肯定要比不知道时更加顺畅。但是，有很多现象虽然不知道为什么发生，但能够知道是如何发生的。暂时把机理的阐明搁置起来，仅仅试着做一下现象的说明。从现在开始应该能够明白很多的事情了。

进行现象的说明时，需要理解一下这个现象是如何发生的，模型化之后把它巧妙地代入数学世界就足够了。虽然不知道核衰变现象通过什么样的机理发生，但得知原子数的变化率与原子数成正比之后，就能够把它带入数学世界了。

令时间为t、放射性物质的原子数为$N(t)$，假设原子数的变化率$\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t$与原子数$N(t)$成正比的模型。比例常数为λ，则

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\lambda N \qquad \leftarrow \text{描述原子数随核衰变变化的微分方程}$$

当原子数N随时间减小，比例常数λ变成正值时，要加上负号[12]。与考虑北海道鹿生存数量时的情况相同，仅仅从这个模型不能决定参数λ[13]。



由核衰变产生的原子数的变化率与原子数成正比，因此得到原子数的变化率$\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t$与原子数$N(t)$成正比的微分方程的模型。

◆ 说明放射性同位素衰变现象的模型

11 不仅限于核衰变，也适用于一般情况。建立北海道鹿生存数量模型时，也说过同样的话。
12 虽然参数本身也可以是负的，但是这里要给人一种减少的感觉。
13 就像后面提到的那样，放射性同位素根据种类不同衰变的速度也会不同，与此相对应的λ值也会不同。

■ 解

那么，求一下这个微分方程的解。把77页求出的式子$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P$与式（3.1）相比之后发现，形式几乎完全相同[14]。若微分方程的形式相同，则解的形式也会相同。也就是说，已经知道其解了[15]，在这里就当练习一下求解。

我们的目标是求放射性物质的原子数关于时间的函数$N(t)$。每次遇见微分方程，都需要确认一下微分方程的这些变量。

因变量

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\lambda N$$

自变量

与刚才提到的微分方程相同，是可分离变量微分方程。两边同时除以N，则

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\lambda$$

两边再进行积分，则

$$\int\frac{1}{N}\mathrm{d}N=-\lambda\int\mathrm{d}t$$

左边的变量N和右边的变量t分别被各自的积分分离。

$$\int\frac{1}{N}\mathrm{d}N=-\lambda\int\mathrm{d}t$$

求各自的积分得到

$$\int\frac{1}{N}\mathrm{d}N=\ln|N|+C_1$$

$$-\lambda\int\mathrm{d}t=-\lambda t+C_2$$

综合一下积分常数得到

$$\ln|N|=-\lambda t+C$$

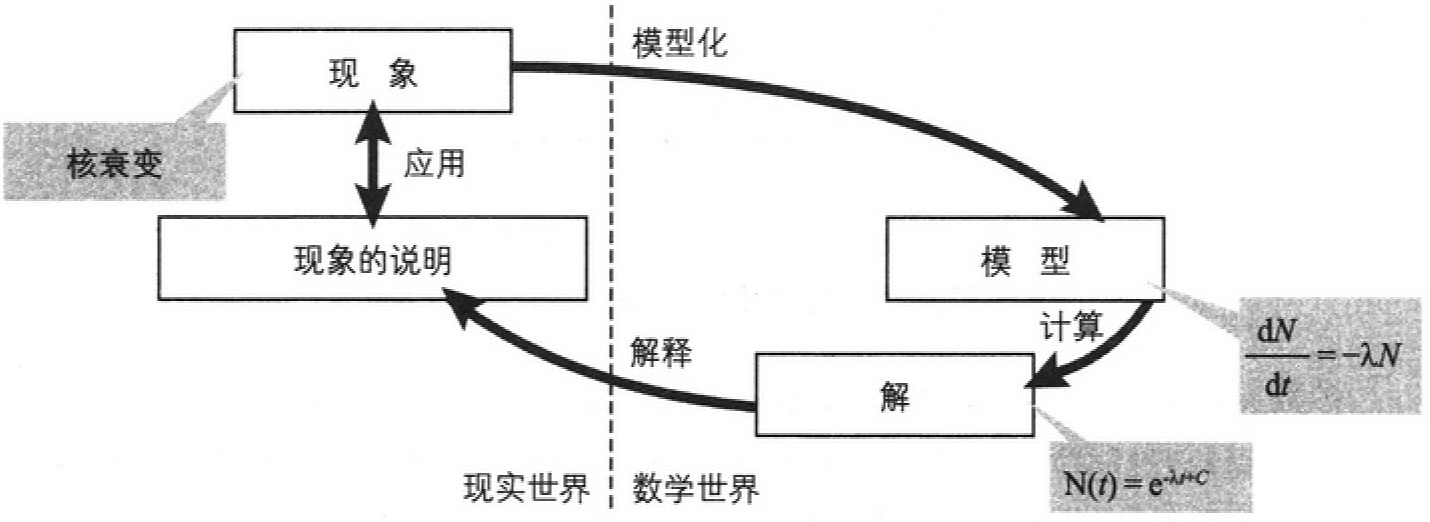
14 意思是，仅仅做变量替换。

15 相当于85页图形中的$\mu<0$的情况。

放射性物质的原子数关于时间的函数$N(t)$为[16]

$N(t)=e^{-\lambda t+C}$微分方程的解　　（3.2）

这样就求出了微分方程的解。



求解微分方程之后，得知放射性物质的原子数随时间的变化可以用指数函数来表达。

◆ 说明放射性同位素衰变现象的模型的解

■解　释

其次，就是决定积分常数，t=0时刻的放射性物质的原子数设为$N(0)=N_0$，那么以此为初始条件，根据式（3.2）则

$N(0)=e^c$

因此化为

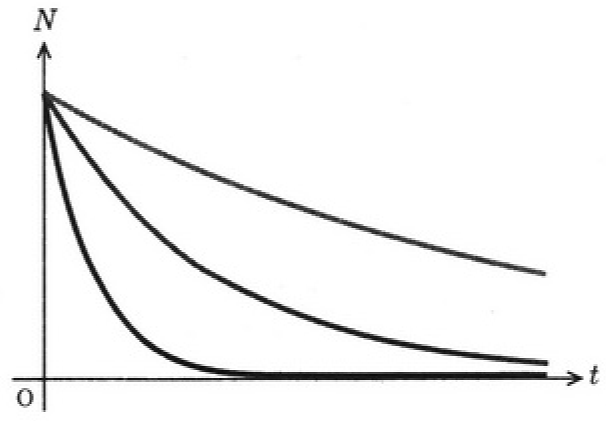
$N_0=e^c$

表示放射性物质原子数的函数能够写成

$N(t)=N_0e^{-\lambda t}$　　（3.3）

由于已经决定了积分常数，再假设参数λ，作为放射性物质的原子数N随时间t变化的曲线。由于现在的情况下λ＞0，原子数必然会减少。

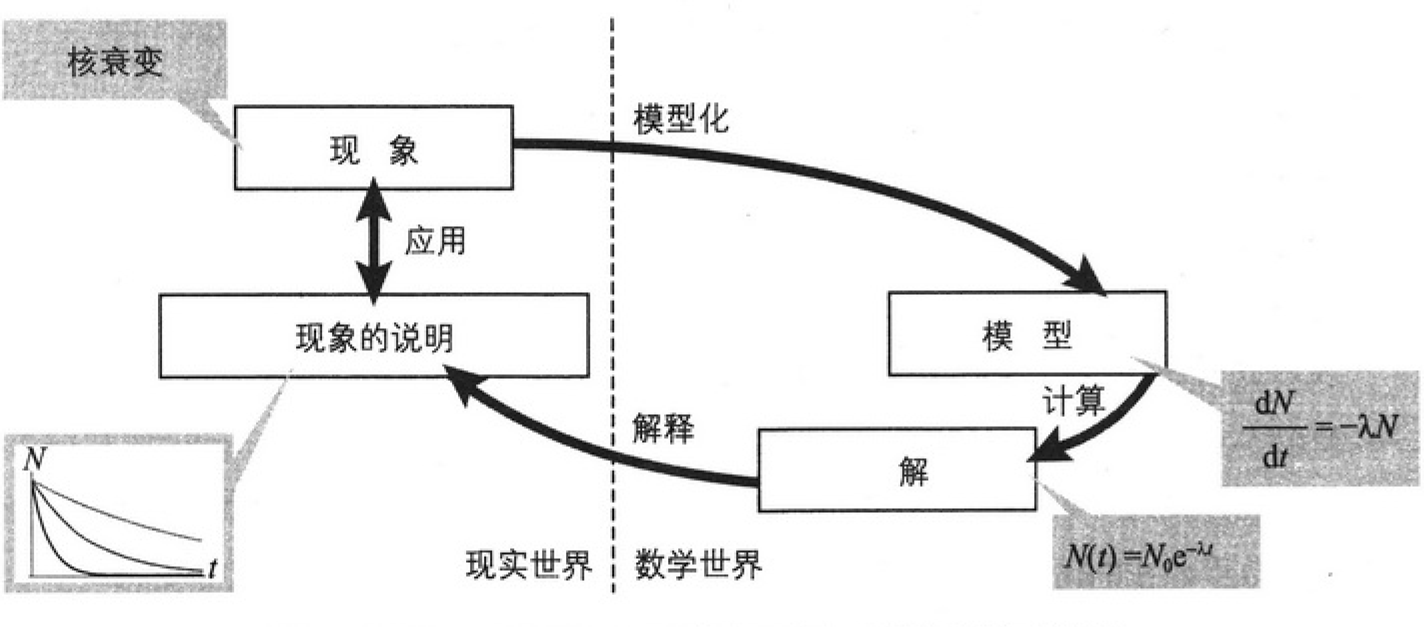
16 N为放射性物质的原子数，因此注意N恒大于0。



参数λ越大，衰变越快。这里作出了与三个λ相对应的三条曲线。

◆ **表示放射性物质的原子数N随时间t变化的曲线**

参数λ越大，原子的数量减少越快（图中的曲线画出了与三个λ相对应的三条曲线）。根据放射性同位素的不同，衰变的速度也会不同，衰变快的放射性同位素的λ值较大，衰变缓慢的放射性同位素的λ值较小。为了表示衰变的程度，λ叫做衰变常数。研究一下实际的放射性同位素并得到其衰变常数，则能够得知何时剩余多少原子，也能够说明未来和过去的现象。



得到了衰变常数，便能够得知何时剩余多少原子，也能够预测未来的情况。

◆ **说明放射性同位素衰变现象的模型的解的解释**

我们也试着研究一下半衰期与衰变常数的关系。把半衰期写成$t_{1/2}$，$t=0$时刻的放射性物质的原子数为N_0，$t=t_{1/2}$时刻，变成$N_0/2$，那么根据式（3.3）

得到

$$\frac{N_0}{2}=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}}$$

求这个方程的解，则解出半衰期$t_{1/2}$为

$$t_{1/2}=\frac{\ln|2|}{\lambda}\sim\frac{0.69}{\lambda}$$

也就是说，半衰期与衰变常数的倒数成正比[17]。

那么，我们能够测定的是放射性强度[18]。放射性强度与单位时间内衰变的原子数（原子的变化率）成正比，因此也就是与原子数成正比[19]。需要说明的是，衰变常数不能直接进行测定得到，而是根据放射性强度随时间减少的情况求得。

哎呀，我们终于理解了如何利用放射性物质测定年代。放射性物质发射放射线的同时衰变成其他的元素，我们了解到在这个过程中放射能的变化如式（3.3）所示，对于已知半衰期（也就是衰变常数）的放射性同位素，若已知现在的数N与其对应的过去某个时刻的数N_0之比（放射性强度之比）N/N_0，就可以得知其时间间隔。

$$\frac{N}{N_0}=\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$\therefore t=\frac{\ln|N/N_0|}{\lambda}$$

这真是太棒了。也就是说，只要得到从遗址出土的遗物的N/N_0，就能知道这些东西是什么时候制作的了[20]。

从遗址出土的文物，比如出土的是木制品，就可以得知这些树何时停止光合作用的。可是并不能得知树木被切割的年代和被加工的年代，这一点虽然较为玄妙，但是那个时代的人不去特意挖掘并使用很久以前的木材，就可以推测出遗迹的年代。如果测定一下那一带的碎木片什么的，也许是年代更加久远的东西[21]。

---

17 衰变速度快的话，变成原来一半的时间就会变短，因此这是理所当然的。

18 测定时，提起放射能，经常用到的是盖革–弥勒计数管和闪光检出器。为了能够简单地得知被爆线量而使用胶片式射线测定器。

19 就是说，如果放射性同位素的原子数量较多的话，放射性也较强。

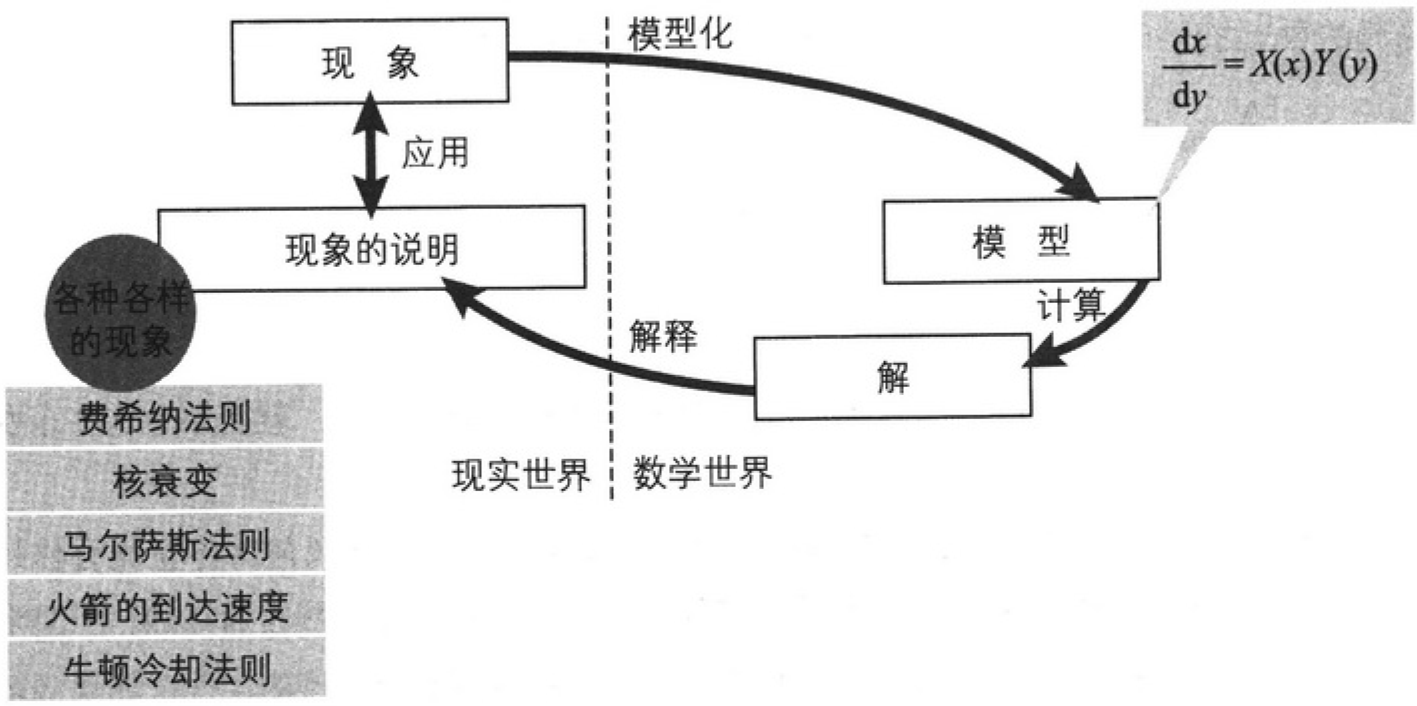
20 正规地说，是什么时候停止光合作用的。

21 这种根据放射性同位素测定年代的方法，年代越久远测定难度就越大。^{14}C的半衰期为5730年，大概6000年左右变成原来的一半，12000年就减少为原来的四分之一，过了60000年之后就变成原来的1/1000。量变的少，就很难进行正确的测定。能够用^{14}C进行测定的也只有数万年的限度。超过此范围，就不能够很准确地测定年代更久远的东西了。若是岩石，有方法可以测定年代更加久远的东西。

7. 各种各样的现象与一个表达式

到此为止，我们得知说明马尔萨斯法则与核衰变这两个完全不同现象的微分方程在数学上可以用一个形式表达。到现在为止解决的可分离变量微分方程在微分方程中是最基本的。方程中所含的两个变量被各自的积分分离，能够进行积分，就可以解出这个微分方程。解法虽然简单，但是各种各样的现象都能用这个形式的微分方程来表达。

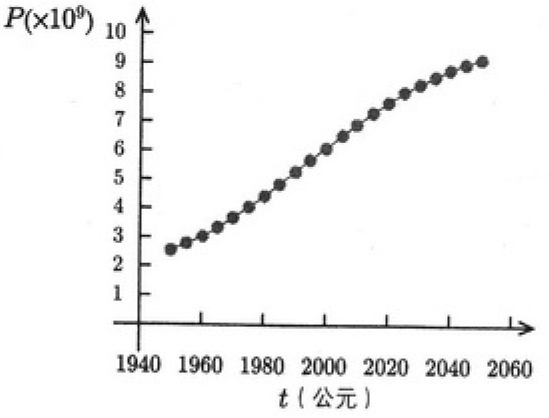
另外，我们得知说明物体冷却时的温度随时间的变化（牛顿冷却法则，参考附录1）,计算火箭的到达速度（齐奥尔科夫斯基公式，参考附录2）对应刺激的心理量的变化（费希纳的法则，参考附录3）等各种各样的现象都能用可分离变量微分方程表达。数学世界中形式相同的模型，能够说明现实世界中各种各样的现象，是不是有点神秘的感觉呢?



◆ 各种各样的现象与一个形式的表达式

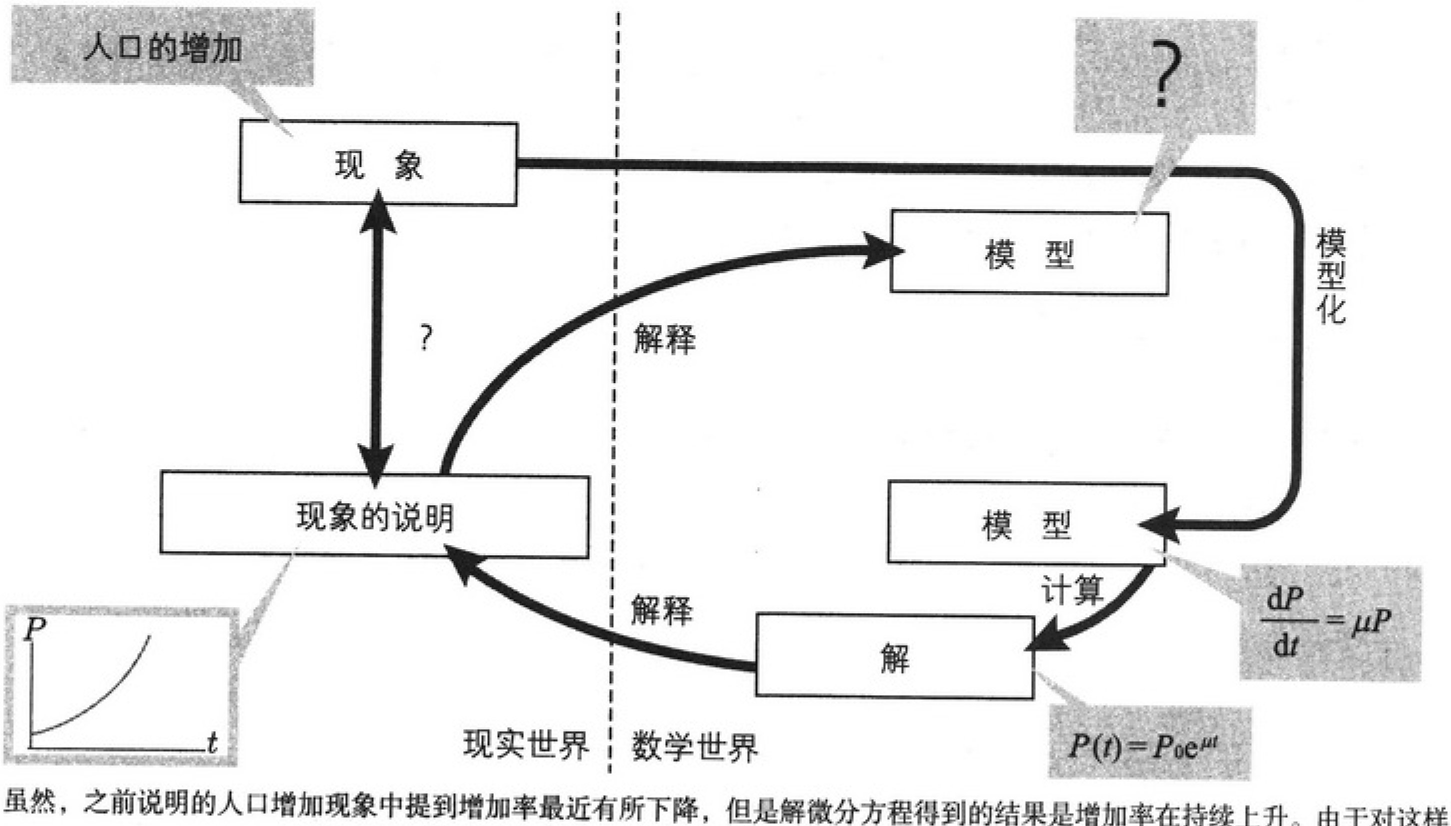
8. 物流模型

那么，在91页研究马尔萨斯法则时，使用了世界人口持续增加这个话题。但是，最近实际人口的增加率有所下降。



◆ 世界的人口（预测）[22]

一般来说，如果人口一味地呈指数函数式增加，不久之后世界人口的质量就会超过地球本身的质量。不管怎么样，那样的事情总不会发生的。马尔萨斯法则虽然局部地说明了一些现象，但是逐渐与现实发生了偏离。



虽然，之前说明的人口增加现象中提到增加率最近有所下降，但是解微分方程得到的结果是增加率在持续上升。由于对这样的结果不满意，因此再一次返回到数学世界对模型进行修正。

◆ 人口增加模型的修正

22 数据出处：联合国，世界人口展望，2008年版。

不仅限于人口。虽然刚开始的时候，皮式培养皿中培养的细菌也是按指数函数式地进行增殖，但是数量增加到不能从培养池里吸收营养的时候就停止增殖，增加率的变化就会迟缓[23]。在稍微大一点的范围使用这个模型时，就不得不对这个模型进行修正。

想说明某个现象的时候，将现实世界的现象带入数学世界，然后试着再用数学世界里解出的结果解释并说明这个现象。尽管得到了期盼的结果并且能用它结束这个作业，但是在不够满意的情况下，再一次回到数学世界对模型进行修正，反复求解解释这样的作业。这样一来，慢慢地就能得到更加精密的解。要精密到什么程度才行呢？到能够认可的程度就可以了。进行循环之后，比以前还要更上一层，因此与目标的距离就逐渐缩短了。那样还不能达到满意的话，再一次回到循环中，对剩下的那一些内容进行进一步的研究和探讨。

再考虑一下人口增加的情况。人口增加，仅仅对生活环境的影响也是很大的[24]。生活环境恶化的话（越来越难以居住），增加率也会有下降趋势。这里，把马尔萨斯径数改写成随着人口P的增加变小的形式。设K为常数，则改写为

$$\mu\left(1-\frac{P}{K}\right)$$

则微分方程变成

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\mu\left(1-\frac{P}{K}\right)P \qquad \leftarrow \text{被修正过的描述人口增长的微分方程} \tag{3.4}$$

那么，这个微分方程的解曲线会是什么样呢？

整理式（3.4），右边变成以K为分母的形式，则

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\mu\frac{(K-P)P}{K}$$

虽然有点难懂，但还是可分离变量微分方程。

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\mu\frac{(K-P)P}{K}$$

变量分离

$$\int\frac{\mathrm{d}P}{(K-P)P}=\frac{\mu}{K}\int\mathrm{d}t$$

其次，要对其进行积分，右边倒是没有问题，左边的话就有点难办了。这时会用到一些常用的便利小招数。将左边的积分函数改写为

23 增殖好像可以分为好几个阶段。

24 环境问题。

$$\frac{1}{(K-P)P}=\frac{1}{K}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{K-P}\right)$$

进行通分的逆运算。分解部分分数。

$$\frac{1}{K}\left(\int\frac{1}{P}\mathrm{d}P+\int\frac{1}{K-P}\mathrm{d}P\right)=\mu\int\mathrm{d}t$$

那么，到此为止各项的积分都能用我们前面见过的方法进行处理。对括号里的两项积分，进行变量替换，令$s=K-P$，根据$\mathrm{d}s/\mathrm{d}P=-1$则

$$\int\frac{1}{K-P}\mathrm{d}P=\int\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=-\int\frac{1}{s}\mathrm{d}s=-\ln s=-\ln(K-P)$$

（这个叫做变量替换法），整个式子化为[25]

$$\ln P-\ln(K-P)=\mu t+C$$

利用对数的性质

$$\ln\left(\frac{P}{K-P}\right)=\mu t+C$$

写成指数函数形式

$$\frac{P}{K-P}=\mathrm{e}^{\mu t+C}$$

求解P，则能够求出

$$P(t)=\frac{K\mathrm{e}^{\mu t+C}}{1+\mathrm{e}^{\mu t+C}}\quad\leftarrow\text{被修正的微分方程的解}\tag{3.5}$$

设$t=0$时刻的人口为P_0，则

$$P_0=\frac{K\mathrm{e}^{C}}{1+\mathrm{e}^{C}}$$

由上式得到

$$\mathrm{e}^{c}=\frac{P_0}{K-P_0}$$

把上式代入式（3.5）中进行整理

$$P(t)=\frac{KP_0\mathrm{e}^{\mu t}}{K+P_0(\mathrm{e}^{\mu t}-1)}\tag{3.6}$$

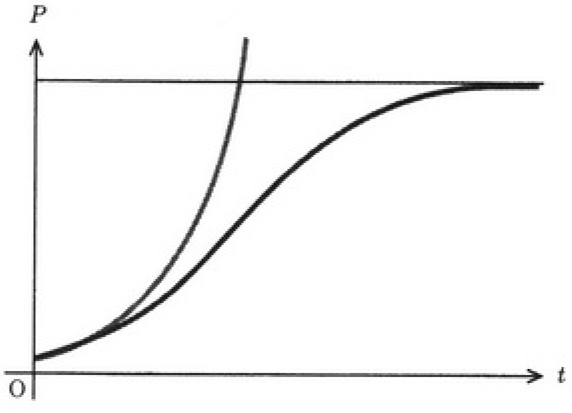
得到的解虽然有点复杂，这时，要领就是从极端的地方开始考虑。

25 P、（$K-P$）同为正。

比如说，把$t=0$代入式（3.6），就变成$P(0)=P_0$。这是初始条件中交代的内容，理所当然成立。试求$t\to\infty$时的极限，但是从式（3.6）不容易看清楚，分子和分母分别除以$e^{-\mu t}$，再整理

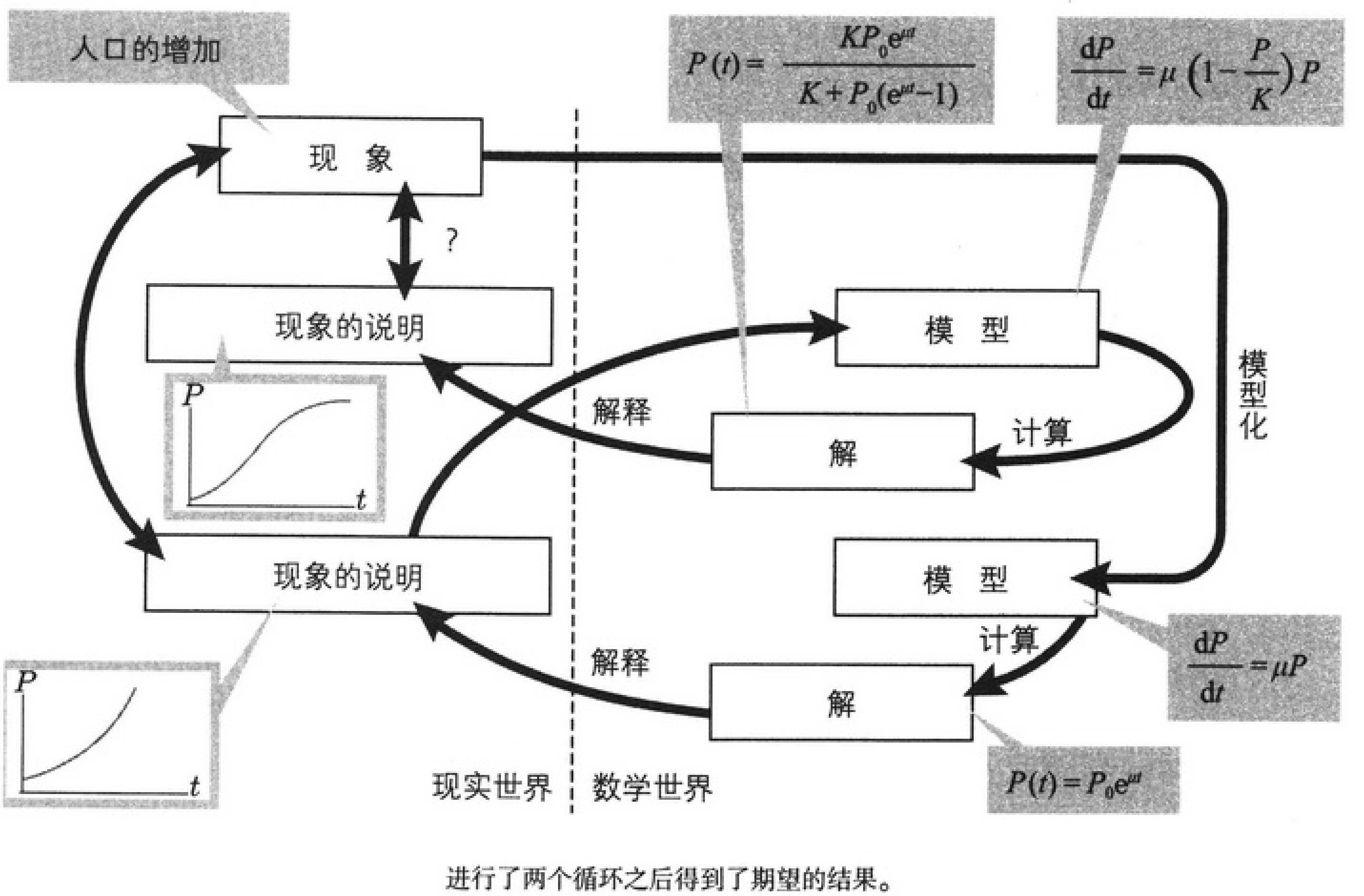
$$P(t)=\frac{KP_0}{(K-P_0)e^{-\mu t}+P_0}$$

对其求$t\to\infty$时的极限，$P_\infty=K$。也就是说，此解从$P(0)=P_0$开始上升，$P_\infty=K$时应该变成最高曲线。作出其解曲线。



刚开始的时候，以指数函数（细线）式地增加，接着增加率变得迟缓，然后再到达恒定的值达到饱和。

◆ 被修正的人口增加模型的解曲线



进行了两个循环之后得到了期望的结果。

◆ 被修正后的人口增加模型

这样的模型被称作物流模型。不仅仅适用于人口增加，也能够很巧妙地说明工业制品普及的情况。

本章主要讨论了可分离变量微分方程。这里大体地看一下

一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=F(x)G(y) \tag{3.8}$$

中，右边是x的函数$F(x)$与y的函数$G(y)$的乘积。像这种形式的微分方程，两个变量x和y分别能够被分离到左边和右边，因此叫做可分离变量微分方程。

式（3.8）的两边除以$G(y)$，

$$\frac{1}{G(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x)$$

两边同时对x进行积分，

$$\int\frac{1}{G(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int F(x)\mathrm{d}x+C$$

左边的积分用变量替换法改写成

$$\int\frac{1}{G(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{G(y)}\mathrm{d}y$$

设积分常数为C，则化为

$$\int\frac{1}{G(y)}\mathrm{d}y=\int F(x)\mathrm{d}x+C \tag{3.9}$$

左边是只含变量y的微分$\mathrm{d}y$和变量y的函数$G(y)$，右边是只含变量x的微分$\mathrm{d}x$和变量x的函数$F(x)$，因此得知左边和右边可以进行变量分离。变量分离之后，仅仅进行积分运算就可以了。然而，具体求解的时候也会出现解不出来的情况。也可以利用计算机进行求解。将其变成式（3.9）的形式，一样能够解得出来[26]。

引入变量分离法也同样可以对微分方程进行求解，因此变量分离法也是解微分方程的基本方法。即使是乍一看不能看出是可分离变量微分方程，也可通过巧妙地替换变量等招数进行变量分离。就像解字谜游戏一样，虽然刚开始的时候自己做的话也许会觉得很有意思，但还是先学习一下先人的智慧吧。

---

26 也有这样求解的情况。

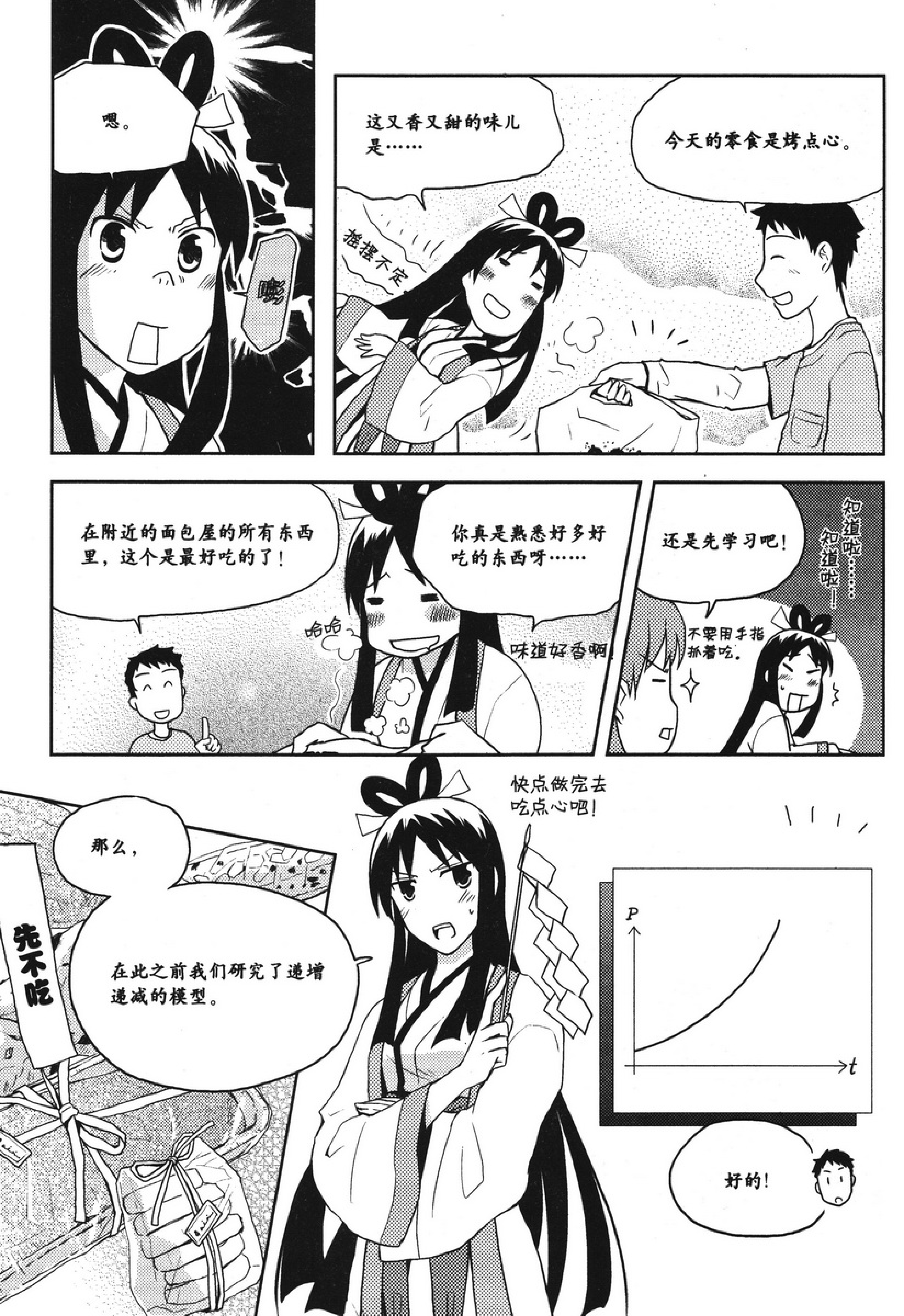
第4章

一阶非齐次线性微分方程常数变易法

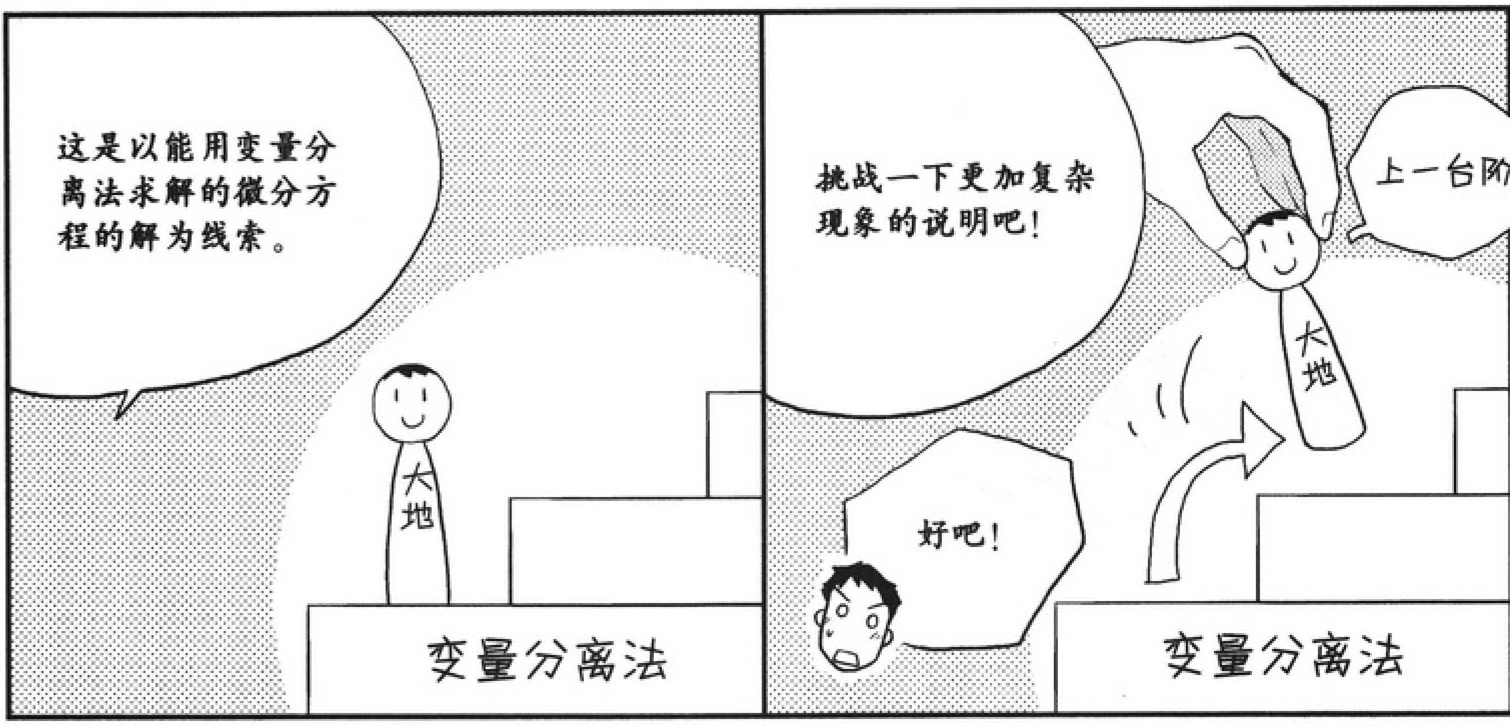
——拨开云雾


数宫神社
今天下雾了。
这么恶劣的天气，参拜者肯定更少，真是越来越闲……
还有人来呢……
都说自己是非专业的啦，竟然……
脸色真像今天的天气！
保佑我的店铺生意兴隆，妻子早日归来……
脸色阴沉沉……
……
有什么好高兴的！
偷偷摸摸
鬼鬼祟祟
一定要保佑我……
一定要保佑我……
啊—
愚蠢！
愚蠢！
要加油哦！

！？
啊！
惊讶
为什么突然变得如此有精神呢？
好，加油！
我还能很能干的！
呀呀呀！
真是吓死我了。
女神！
真是太棒了！
好像很累的样子啊！
嗯……
这样行吗……
啊！！！
哇！
什么呀！
哇
你们的愿望不是已经实现了吗！？
暗自偷笑
好感动啊！
真是一帮奇怪的家伙！


今天的零食是烤点心。
这又香又甜的味儿是……
摇摆不定
嗯。
嘭
在附近的面包屋的所有东西里，这个是最好吃的了！
你真是熟悉好多好吃的东西呀……
哈哈
味道好香啊！
还是先学习吧！
不要用手指抓着吃。
知道啦……知道啦……！
那么，
先不吃
在此之前我们研究了递增递减的模型。
快点做完去吃点心吧！
P
t
好的！


在现实中持续增加持续减少的事情不太常见。
在适当的情况下，还是稳定的现象较多。
单调增加
单调减小
稳定
是啊！
v
t
因此，今天我们挑战一下逐渐变化然后变成恒定值的现象的说明。

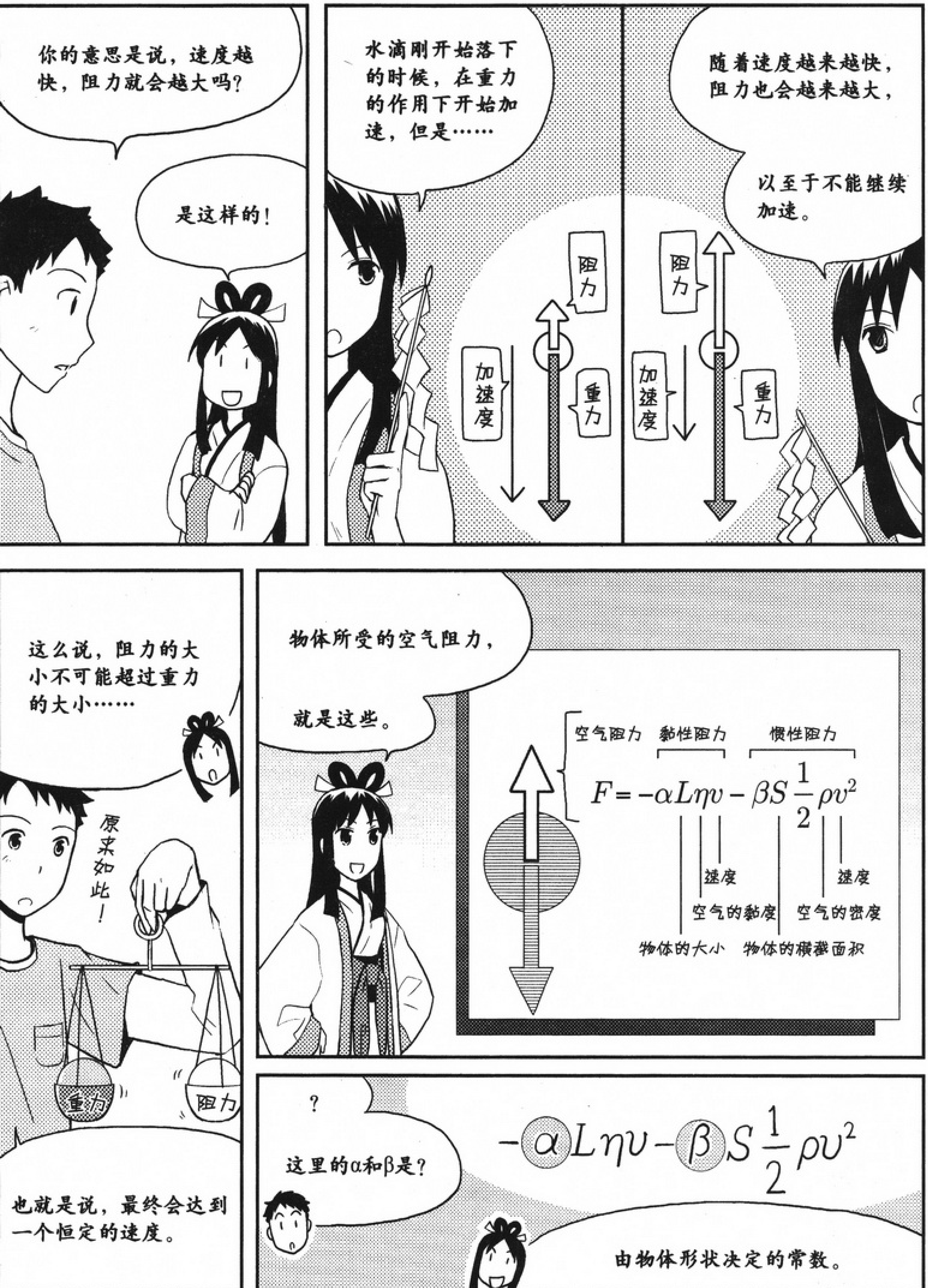

这是以能用变量分离法求解的微分方程的解为线索。
大地
变量分离法
挑战一下更加复杂现象的说明吧！
上一台阶
大地
好吧！
变量分离法

1. 现 象

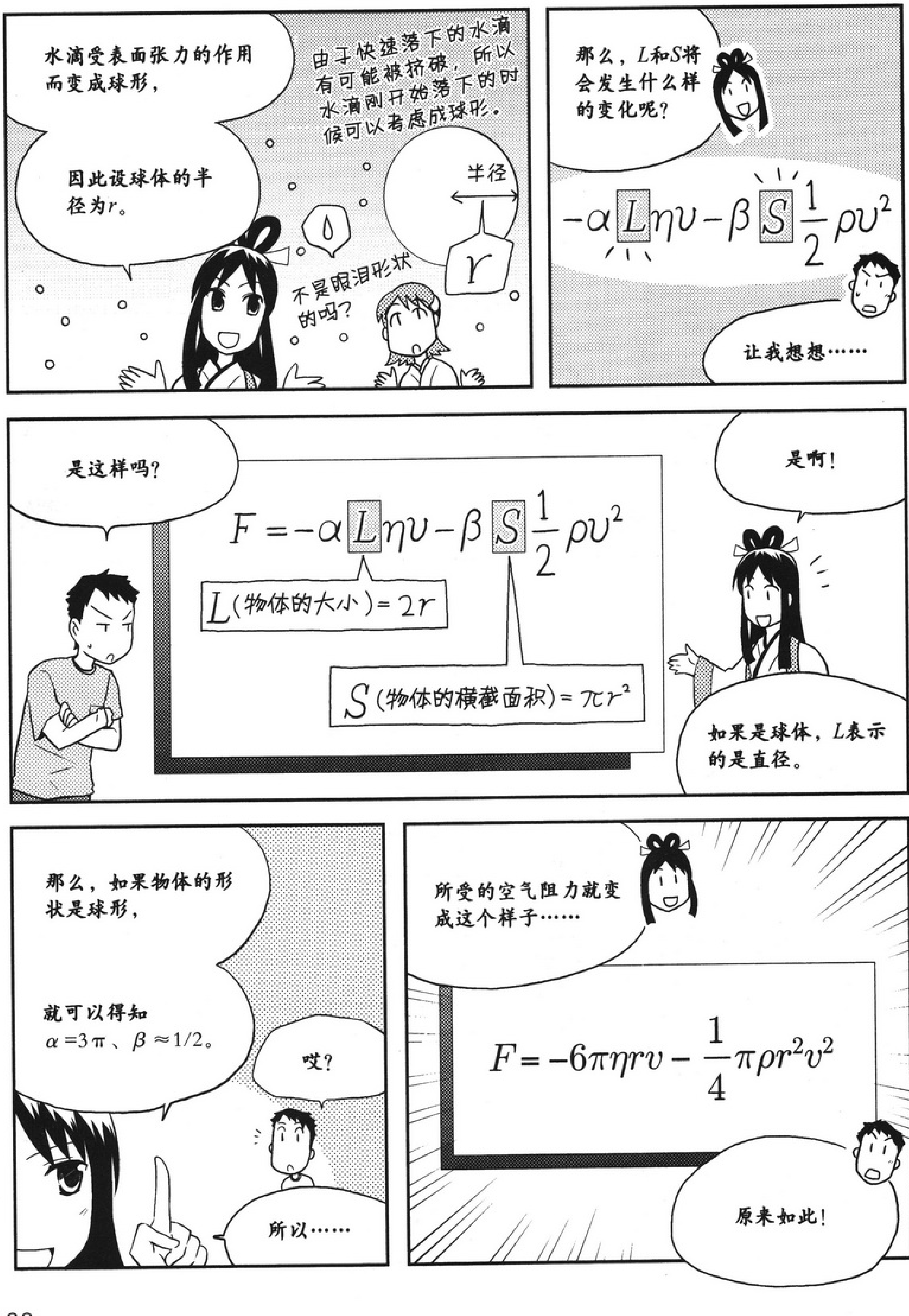

要用“从空中落下”的东西说明吗？
诶？
……什么也没有啊？
雾啊雾！
雾，不就是水蒸气吗？
雾、雨和云彩都是水滴呀！
跟水蒸气不同吧
へ一


这也是在落下吗？
咦
看不太清楚是不是在落下啊……
好像是漂着的感觉。
这是因为速度很慢。
是这样啊……
连伞都没有带，受时间限制，能顺利进行吗？！
相反也有像雷阵雨似的快速落下的雨。
为什么落下的速度会有所不同呢？
慢的
雾
快的
雷阵雨
是因为雾的水滴较小，而雷阵雨的雨滴较大的原因吗？
嗬……
你的意思是说，仅仅因为大落下的速度就快吗？
嗯。
如果作用在水滴上的力只有重力，
两个球同时落下，将会怎么样呢？
伽利略
那么从相同高度落下的所有水滴都以相同的速度落下。
嗯。
加油啊，大地！


对啊！
有空气阻力呀！
空气3对，水滴在空气中下落的时候会受到空气的阻力。
空气阻力分为两种。
运动的物体受拖拽空气所产生的黏性阻力和
黏性阻力
(拖拽产生的阻力)
空气
空气
惯性阻力
(碰撞产生的阻力)
运动的物体从正面碰撞空气的时候产生的惯性阻力。
他们共同作为阻力作用于物体，其方向为阻碍物体运动的方向。
阻力
速度
物体
重力
顺便说一下，黏性阻力与物体的速度成正比，惯性阻力与速度的平方成正比。
嗯。

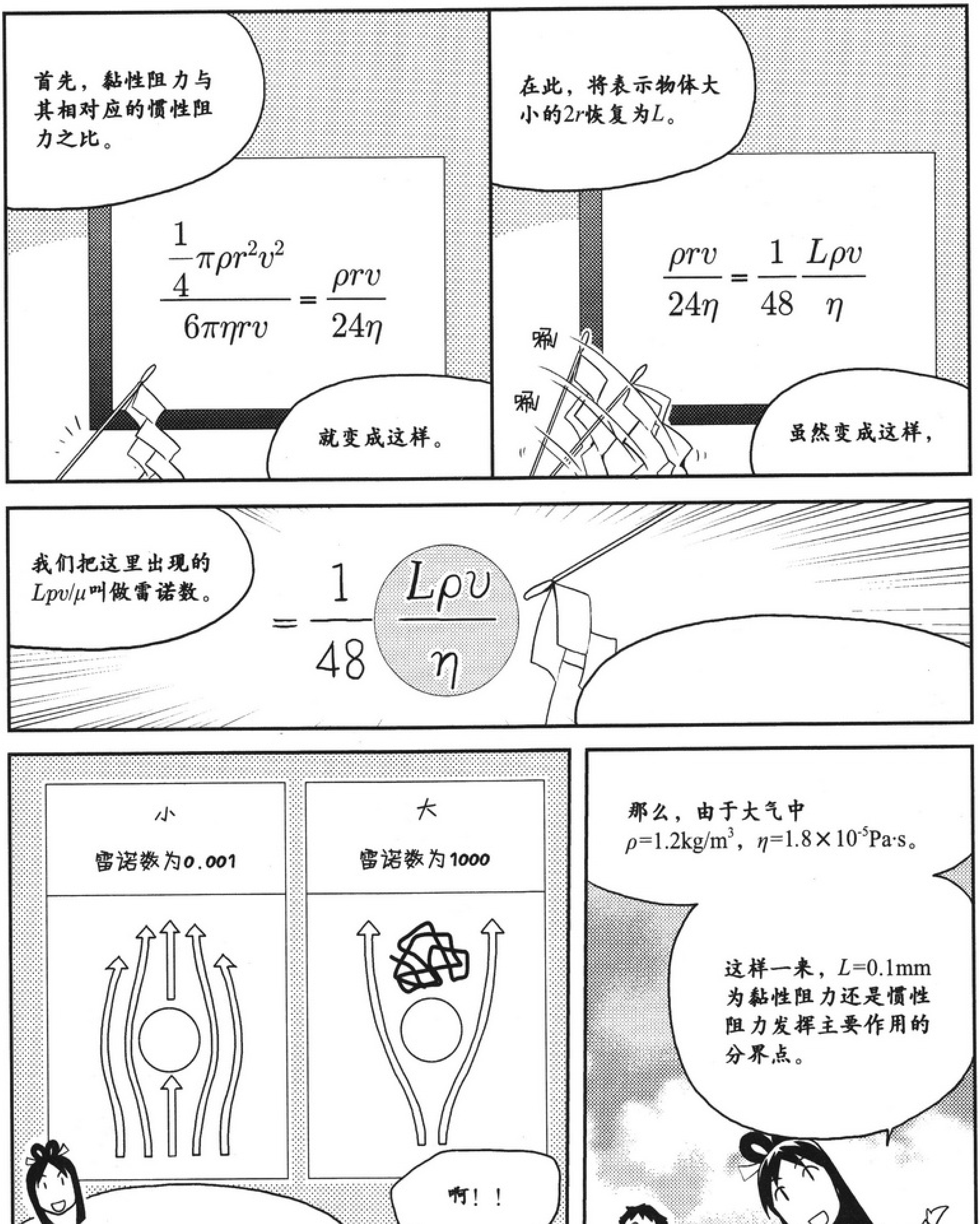


你的意思是说，速度越快，阻力就会越大吗？
是这样的！
水滴刚开始落下的时候，在重力的作用下开始加速，但是……
阻力
加速度
重力
随着速度越来越快，阻力也会越来越大，
以至于不能继续加速。
阻力
加速度
重力
这么说，阻力的大小不可能超过重力的大小……
原来如此！
重力
阻力
也就是说，最终会达到一个恒定的速度。
物体所受的空气阻力，
就是这些。
空气阻力
黏性阻力
惯性阻力
$F=-\alpha L\eta v-\beta S\frac{1}{2}\rho v^2$
速度
速度
空气的黏度
空气的密度
物体的大小
物体的横截面积
？
这里的α和β是？
$-\alpha L\eta v-\beta S\frac{1}{2}\rho v^2$
由物体形状决定的常数。



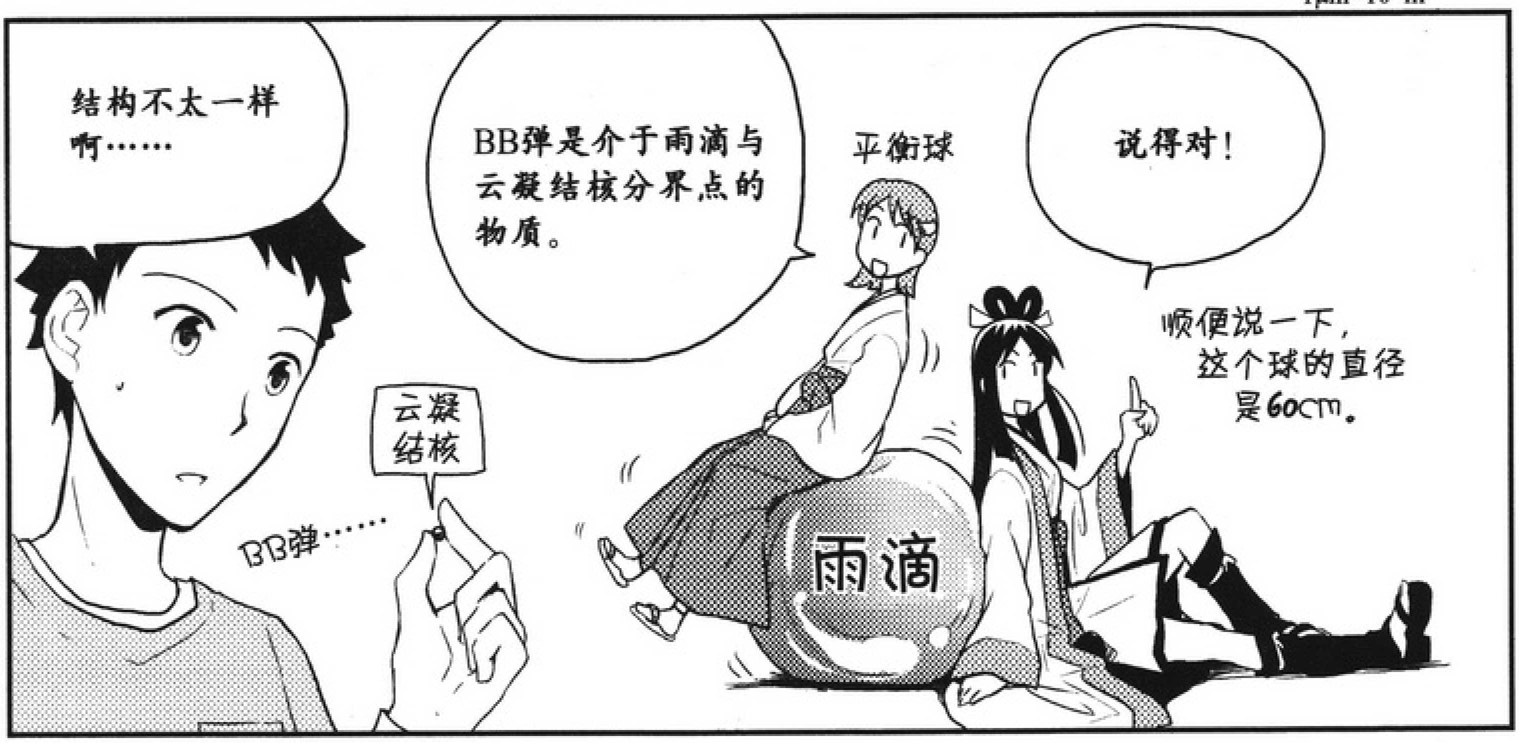
水滴受表面张力的作用而变成球形，
由于快速落下的水滴有可能被挤破，所以水滴刚开始落下的时候可以考虑成球形。
因此设球体的半径为r。
半径
r
不是眼泪形状的吗？
那么，L和S将会发生什么样的变化呢？
$-\alpha \boxed{L} \eta v - \beta \boxed{S} \frac{1}{2} \rho v^2$
让我想想……
是这样吗？
$F = -\alpha \boxed{L} \eta v - \beta \boxed{S} \frac{1}{2} \rho v^2$
L（物体的大小）$= 2r$
S（物体的横截面积）$= \pi r^2$
是啊！
如果是球体，L表示的是直径。
那么，如果物体的形状是球形，
就可以得知
$\alpha = 3\pi$、$\beta \approx 1/2$。
哎？
所以……
所受的空气阻力就变成这个样子……
$F = -6\pi\eta r v - \frac{1}{4}\pi\rho r^2 v^2$
原来如此！

换句话说，
一般的小物体在黏性大的黏糊流体中缓慢移动时，黏性阻力变成主要的阻力。
阻力
阻力
缓慢地
大物体在黏性小的清爽液体中快速移动时，惯性阻力变成主要的阻力。
快的
阻力
总觉得有点……明白了！
嗯
嗯
噢……
冷笑
那么雨滴会是什么样呢？
呼呼
哎？
让我想想……
呼呼
嗯，
是黏性……吧？
呵呵呵。
偷偷笑
神仙姐姐看起来好开心呀！
判断这个的标志，
叫做雷诺数。

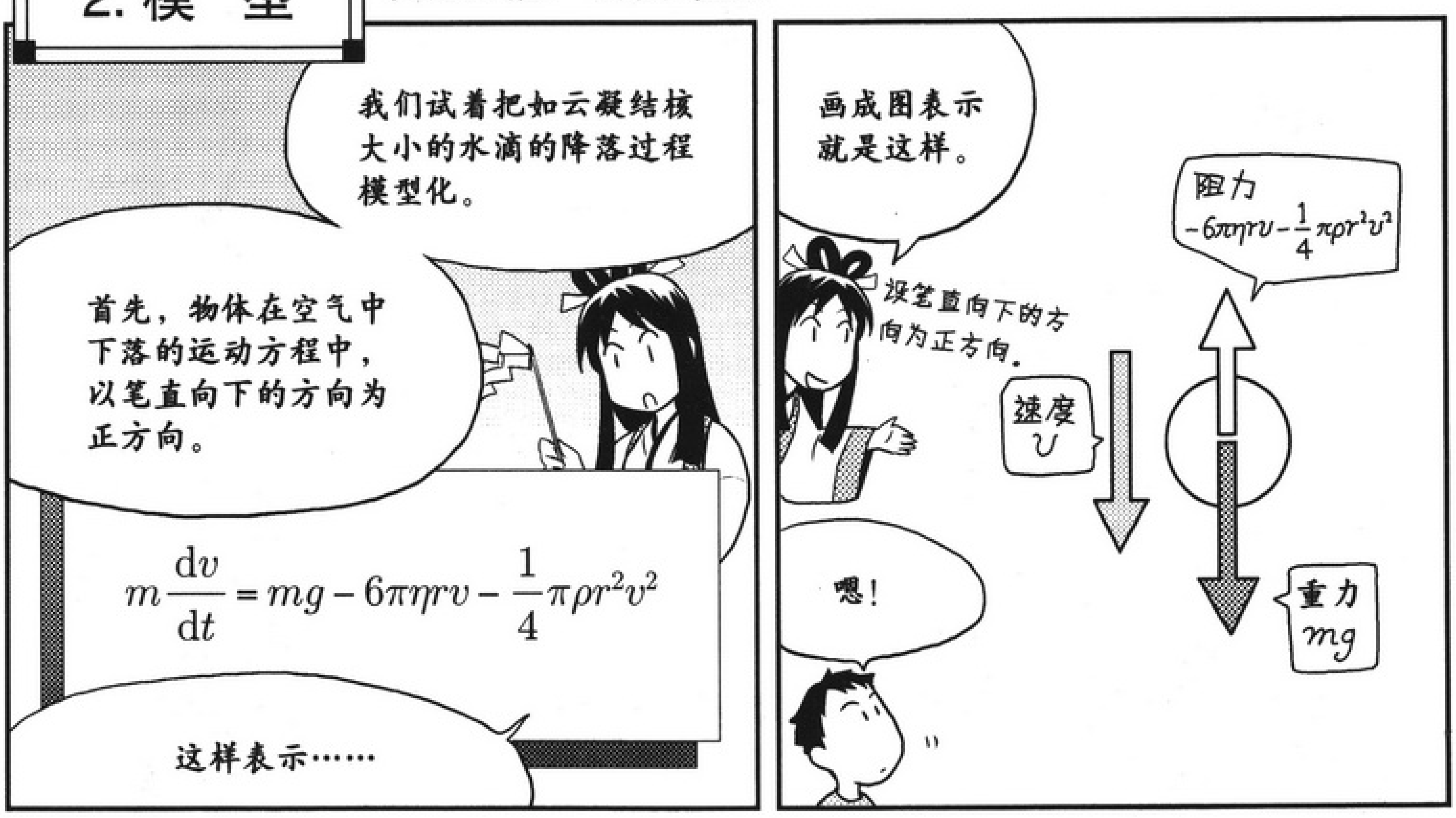


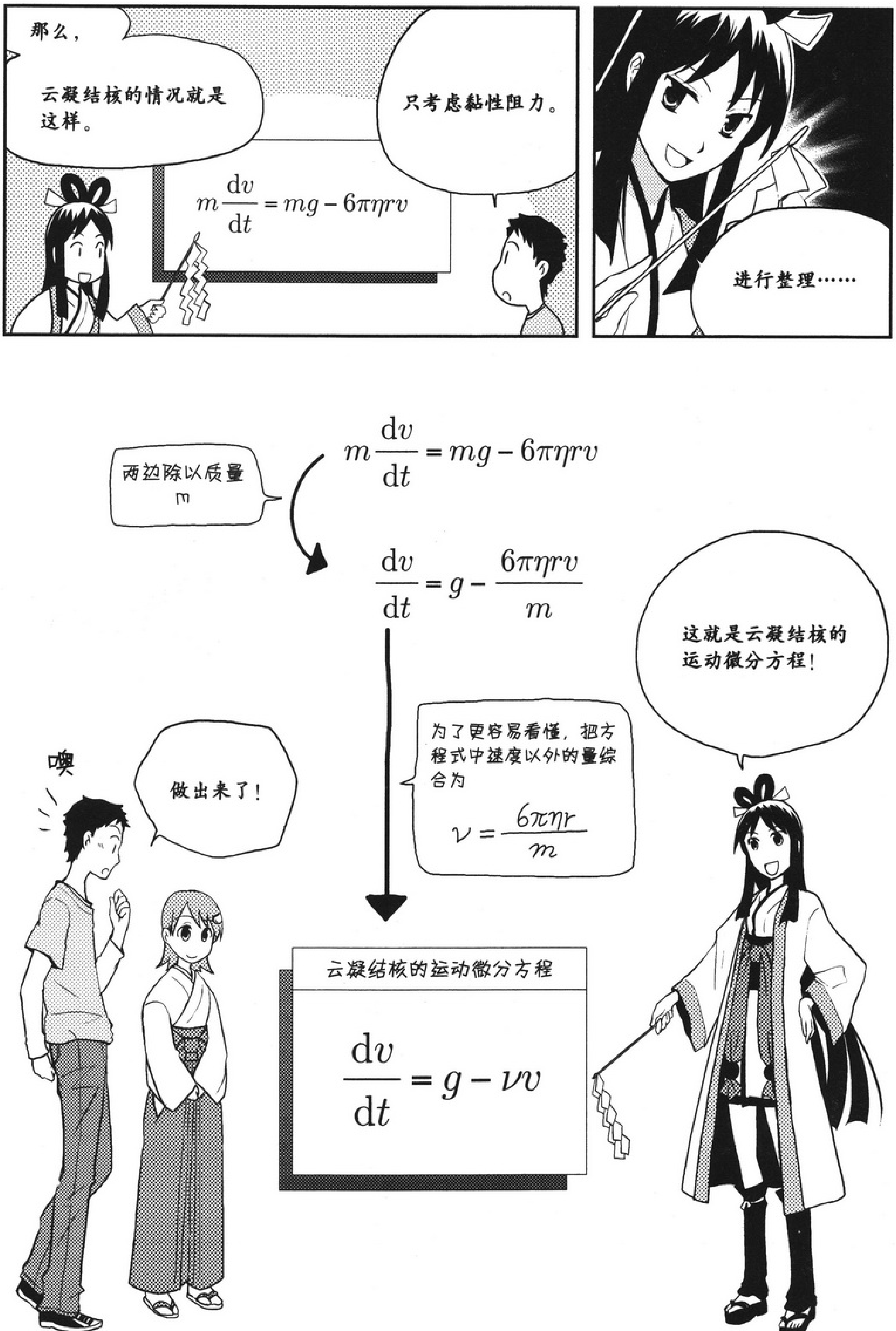
首先，黏性阻力与其相对应的惯性阻力之比。
$\dfrac{\frac{1}{4}\pi\rho r^2v^2}{6\pi\eta rv}=\dfrac{\rho rv}{24\eta}$
就变成这样。
在此，将表示物体大小的$2r$恢复为L。
$\dfrac{\rho rv}{24\eta}=\dfrac{1}{48}\dfrac{L\rho v}{\eta}$
唰
唰
虽然变成这样，
我们把这里出现的$L\rho v/\mu$叫做雷诺数。
$=\dfrac{1}{48}\dfrac{L\rho v}{\eta}$
小
雷诺数为0.001
大
雷诺数为1000
当雷诺数较小的时候，黏性阻力发挥主要作用，大的时候惯性阻力发挥主要作用。
啊！！
那么，由于大气中ρ=1.2kg/m^3，η=1.8×10^{-5}Pa·s。
这样一来，L=0.1mm为黏性阻力还是惯性阻力发挥主要作用的分界点。
原来如此……

※$1\mu m=10^{-6}m$



2. 模 型



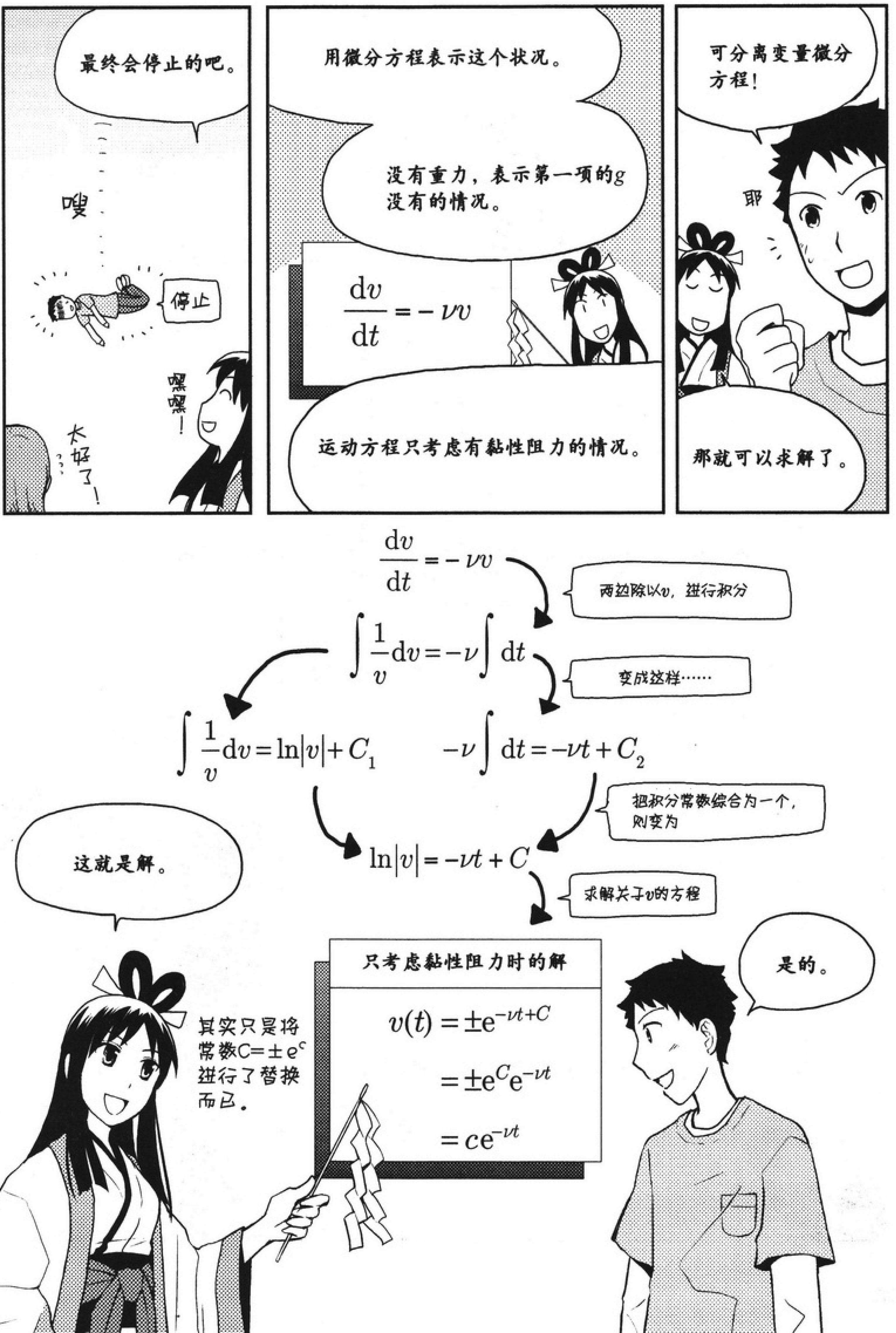

那么，
云凝结核的情况就是这样。
$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-6\pi\eta rv$
只考虑黏性阻力。
进行整理……
两边除以质量m
$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-6\pi\eta rv$
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-\frac{6\pi\eta rv}{m}$
为了更容易看懂，把方程式中速度以外的量综合为
$\nu=\frac{6\pi\eta r}{m}$
云凝结核的运动微分方程
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-\nu v$
这就是云凝结核的运动微分方程！
噢
做出来了！


好！
试着求一下解！
哈哈，要出学习成果了！
大地，加油！
好
哦？
……
$$\frac{dv}{dt}=g-\nu v$$
不行啊。
$$\frac{dv}{dt}=g-\nu v$$
当
啊
含有g，因此不能进行变量分离……
这个
$$\frac{dv}{dt}=g-\nu v$$
不能就那样认输啊！
这次只是稍微提高了一点难度。
好好考虑一下。
云疑结核的运动微分方程
物体的速度随时间的变化
单位质量物体上作用的力
右边表示作用在物体上的力（除以质量的结果）
这个微分方程的左边表示物体速度随时间的变化。
$$\frac{dv}{dt}=g-\nu v$$
是的……

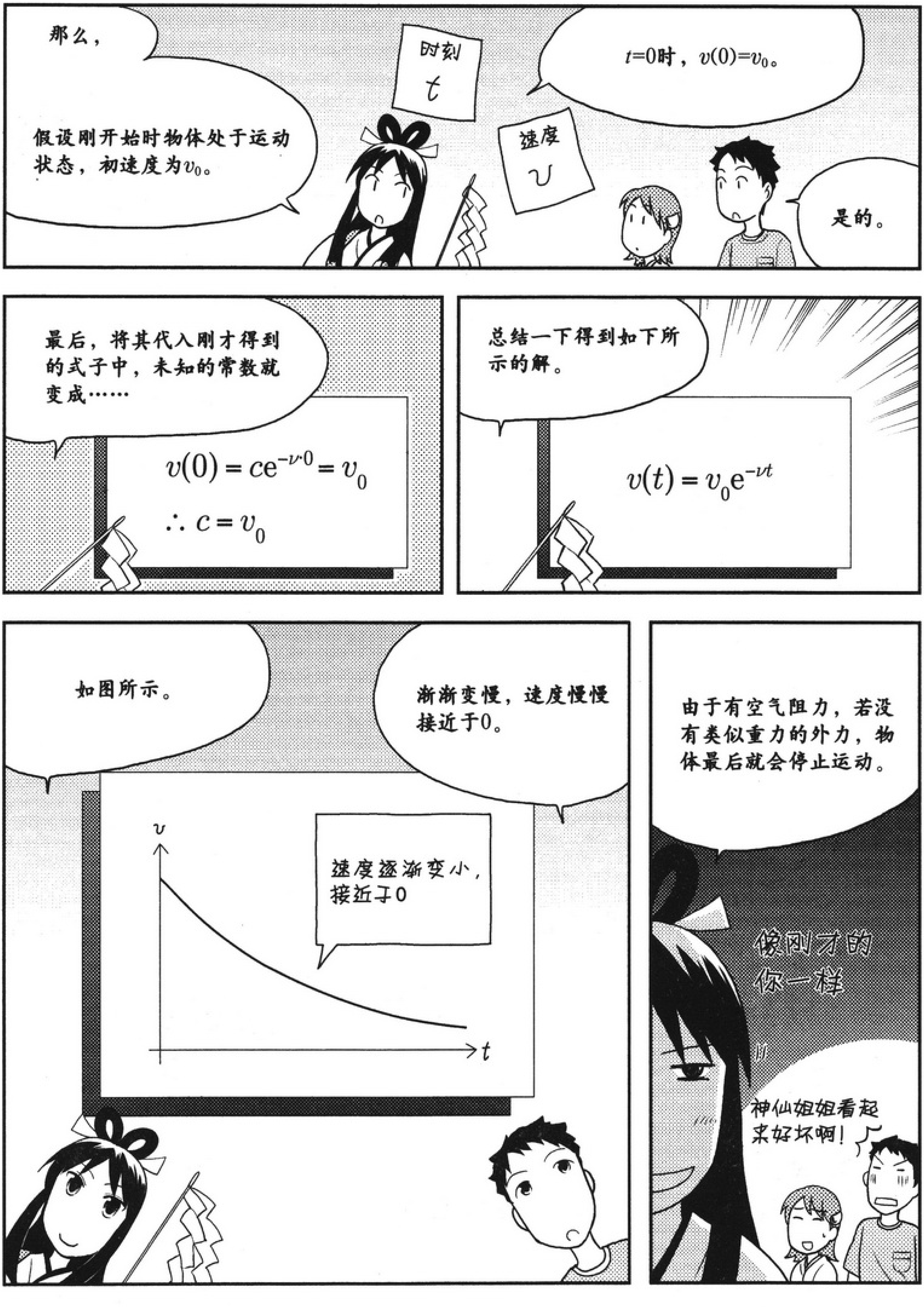

也就是说，物体的速度在右边力的作用下随时间变化。
那么，
$\frac{dv}{dt}=g-\nu v$
由于改变物体速度的原因是g和$-\nu v$两项之和，
因此它们决定了物体的速度。
g
$-\nu v$
这两项之中，g表示重力加速度这个常数，
$-\nu v$表示与物体（水滴）的速度成正比的v的函数。
嗯……
g
$-\nu v$
嗯……
从物理方面考虑一下。
$-\nu v$
第一项的常数g表示物体总是受一定的重力。
是的。
也就表示物体以垂直向下的加速度运动。

考虑刚开始时为静止的物体……
站在原地!
不要动!
?
以垂直向下的加速度运动的意思是……
啊?
傻瓜
垂直向下的速度v逐渐增大。
呀!大地!
速度v增大。
啊
啊
阻力
重力
随着v增大，νv也变大，反方向的阻力也会变大。
是的……
νv
g
v
毛骨悚然了吧!
啊
请原谅我吧!
右边的项表示重力与阻力的合力，
啊?
物体下落的速度越快，物体垂直向下的合力就会越小，
最终……
最终重力与阻力保持平衡!
嗯!
阻力大于重力的情况是不存在的!
就像刚才提到的小水滴的情况!
实际上，重力与阻力保持平衡时作用在物体上的合力为0,
是的……
啊
因此物体以恒定的速度下落。
恒定
阻力
重力

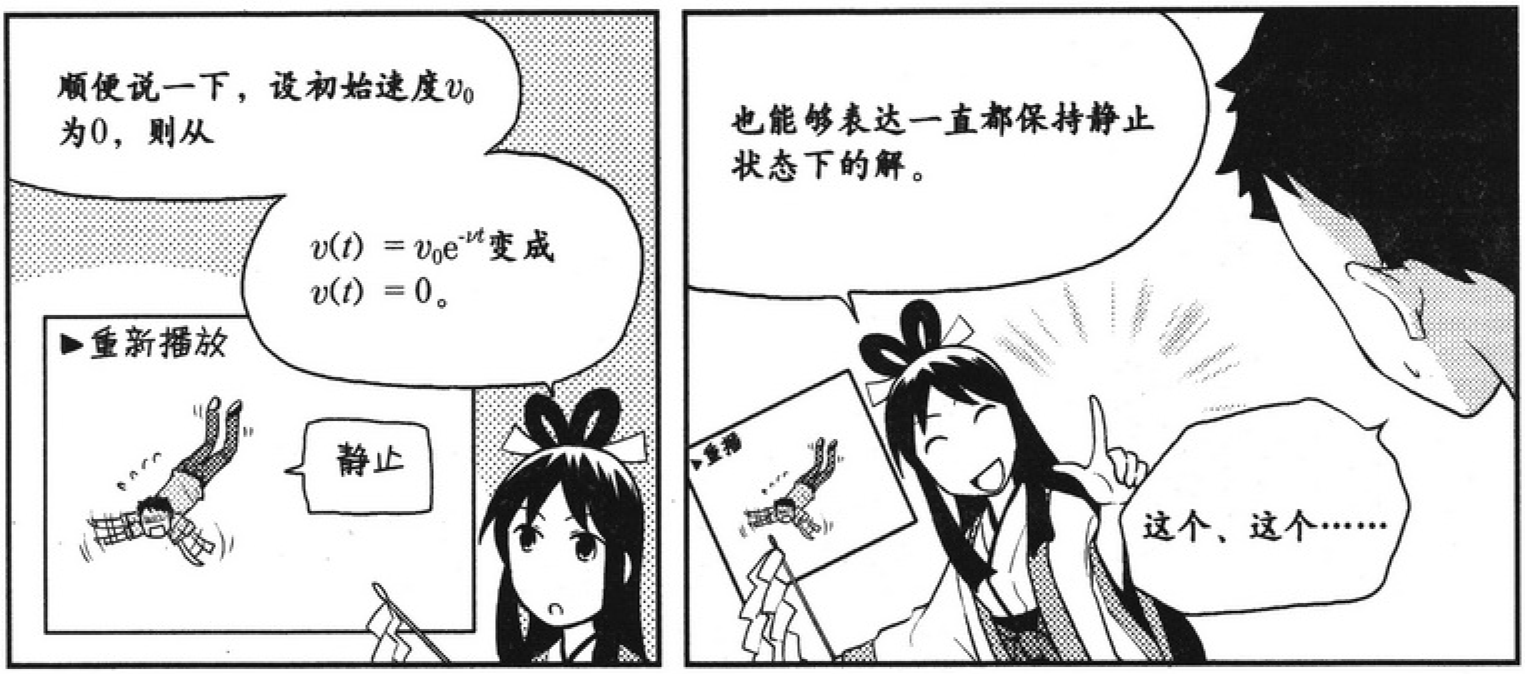

……那么，试着考虑一下，若没有重力，将会变成什么样呢？
诶？
冷笑
天……空！
哇
!?
哇
这个就叫做思想实验。
没有重力的情况下，由于没有垂直向下的力，
刚开始处于静止状态的物体不会落下，会原地不动。
静止
哇，放我下来！
但是什么也不发生就没有意思了。
因此我们假设物体刚开始时稍微运动了一下。
呀
啪
啊
设物体开始运动时的初速度为v_0，刚开始时作用在物体的阻力为$-\nu v_0$。
初始速度 v_0
阻力 $-\nu v_0$
然而，阻力的方向是阻碍物体运动的方向，因此物体的速度会逐渐变小……



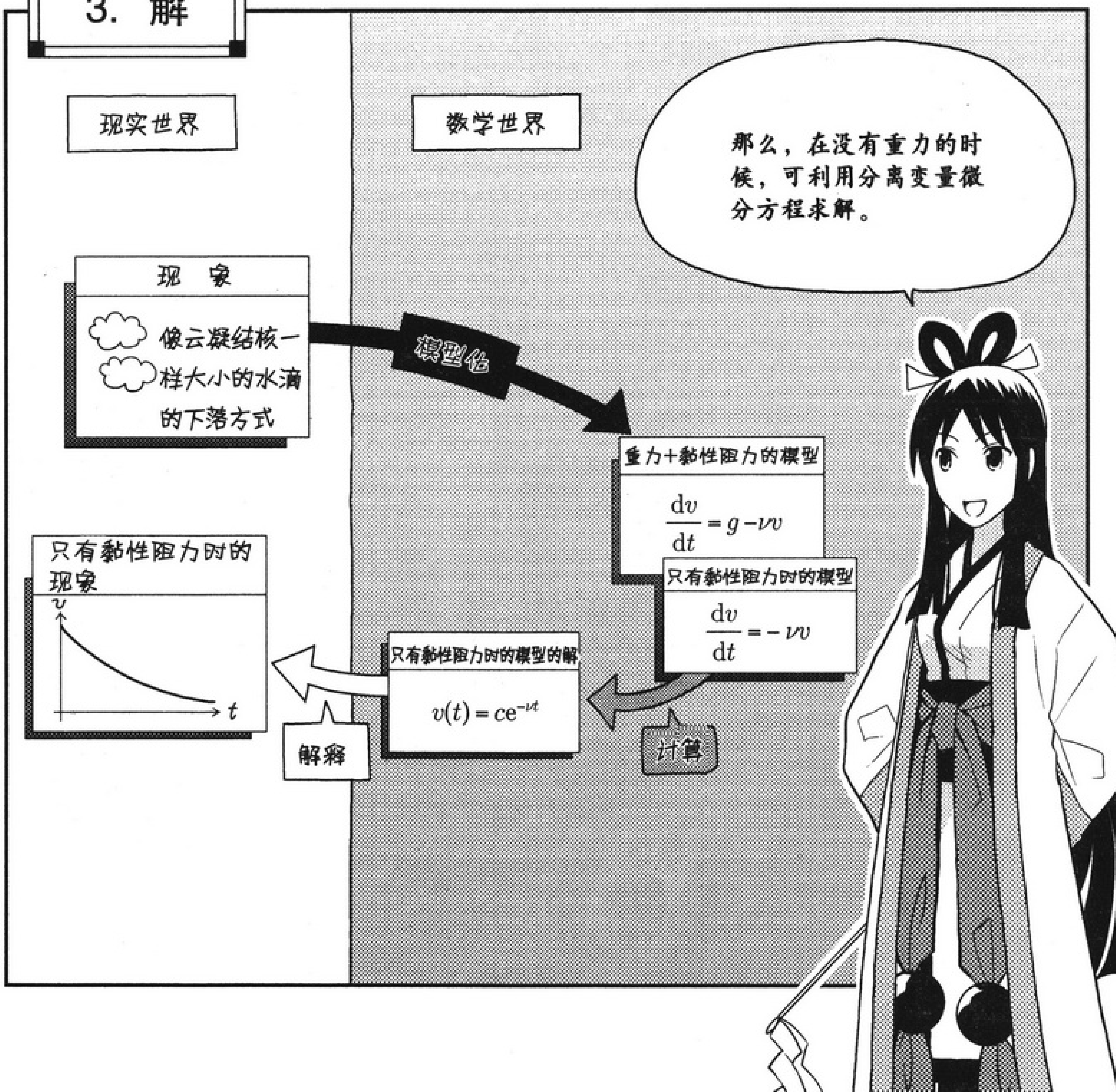
最终会停止的吧。
嗖
停止
嘿嘿！
太好了！
用微分方程表示这个状况。
没有重力，表示第一项的g没有的情况。
$\frac{dv}{dt} = -\nu v$
运动方程只考虑有黏性阻力的情况。
可分离变量微分方程！
耶
那就可以求解了。
$\frac{dv}{dt} = -\nu v$
两边除以v，进行积分
$\int \frac{1}{v} dv = -\nu \int dt$
变成这样……
$\int \frac{1}{v} dv = \ln|v| + C_1$
$-\nu \int dt = -\nu t + C_2$
把积分常数综合为一个，则变为
$\ln|v| = -\nu t + C$
求解关于v的方程
这就是解。
只考虑黏性阻力时的解
$v(t) = \pm e^{-\nu t + C}$
$= \pm e^{C} e^{-\nu t}$
$= c e^{-\nu t}$
其实只是将常数$c = \pm e^{C}$进行了替换而已。
是的。



那么，
时刻 t
t=0时，$v(0)=v_0$。
假设刚开始时物体处于运动状态，初速度为v_0。
速度 v
是的。
最后，将其代入刚才得到的式子中，未知的常数就变成……
$v(0) = ce^{-\nu \cdot 0} = v_0$
$\therefore c = v_0$
总结一下得到如下所示的解。
$v(t) = v_0 e^{-\nu t}$
如图所示。
渐渐变慢，速度慢慢接近于0。
v
t
速度逐渐变小，接近于0
由于有空气阻力，若没有类似重力的外力，物体最后就会停止运动。
像刚才的你一样
神仙姐姐看起来好坏啊！


顺便说一下，设初始速度v_0为0，则从
$v(t)=v_0\mathrm{e}^{-\nu t}$变成
$v(t)=0$。
▶重新播放
静止
也能够表达一直都保持静止状态下的解。
▶重播
这个、这个……

3. 解


现实世界
数学世界
那么，在没有重力的时候，可利用分离变量微分方程求解。
现 象
像云凝结核一样大小的水滴的下落方式
模型化
重力+黏性阻力的模型
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-\nu v$
只有黏性阻力时的模型
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\nu v$
只有黏性阻力时的模型的解
$v(t)=c\mathrm{e}^{-\nu t}$
计算
解释
只有黏性阻力时的现象
v
t

那么，接下来……
冷笑
又是一副坏坏的表情
考虑一下如何通过对这个解进行补充，
求出本来想要求解的微分方程的解！
$v(t) = ce^{-\nu t}$
啦啦♫
诶？
能做到吗？
这个解说明了忽略重力考虑空气阻力的情况。
只有黏性阻力时的模型的解
$v(t) = ce^{-\nu t}$
是的。
因此在此基础上，附加重力的效果，
这个解就应该满足
$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$!
重力
$v(t) = ce^{-\nu t}$
嗯。


不过……
那种恰到好处的补充……
那么，假设$v(t)=ce^{-\nu t}$中的系数c为时间t的函数！
?
这样假设的话，
用函数替换常数
$c=c(t)$
啪
那么，微分方程的解$v(t)=ce^{-\nu t}$可以写成$v(t)=c(t)e^{-\nu t}$。
用函数替换常数得到的解
$v(t)=c(t)e^{-\nu t}$
啪
满足这个解的微分方程就是我们本来想要求解的微分方程，
将此解代入本来想要求的方程中！

所有计算归纳总结如下所示

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \nu v$$

本来想要求解的微分方程

代入假设的解$v(t)=c(t)\mathrm{e}^{-\nu t}$

$$\frac{\mathrm{d}(c(t)\mathrm{e}^{-\nu t})}{\mathrm{d}t} = g - (c(t)\mathrm{e}^{-\nu t})$$

左边进行微分

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\nu t} + c(t)\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\nu t}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\nu t} + c(t)(-\nu\mathrm{e}^{-\nu t})}$$

还原

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\nu t} - \nu c(t)\mathrm{e}^{-\nu t} = g - \nu c(t)\mathrm{e}^{-\nu t}$$

消去两边的$\nu c(t)\mathrm{e}^{-\nu t}$

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\nu t} = g$$

将$\mathrm{e}^{-\nu t}$移项，然后进行积分

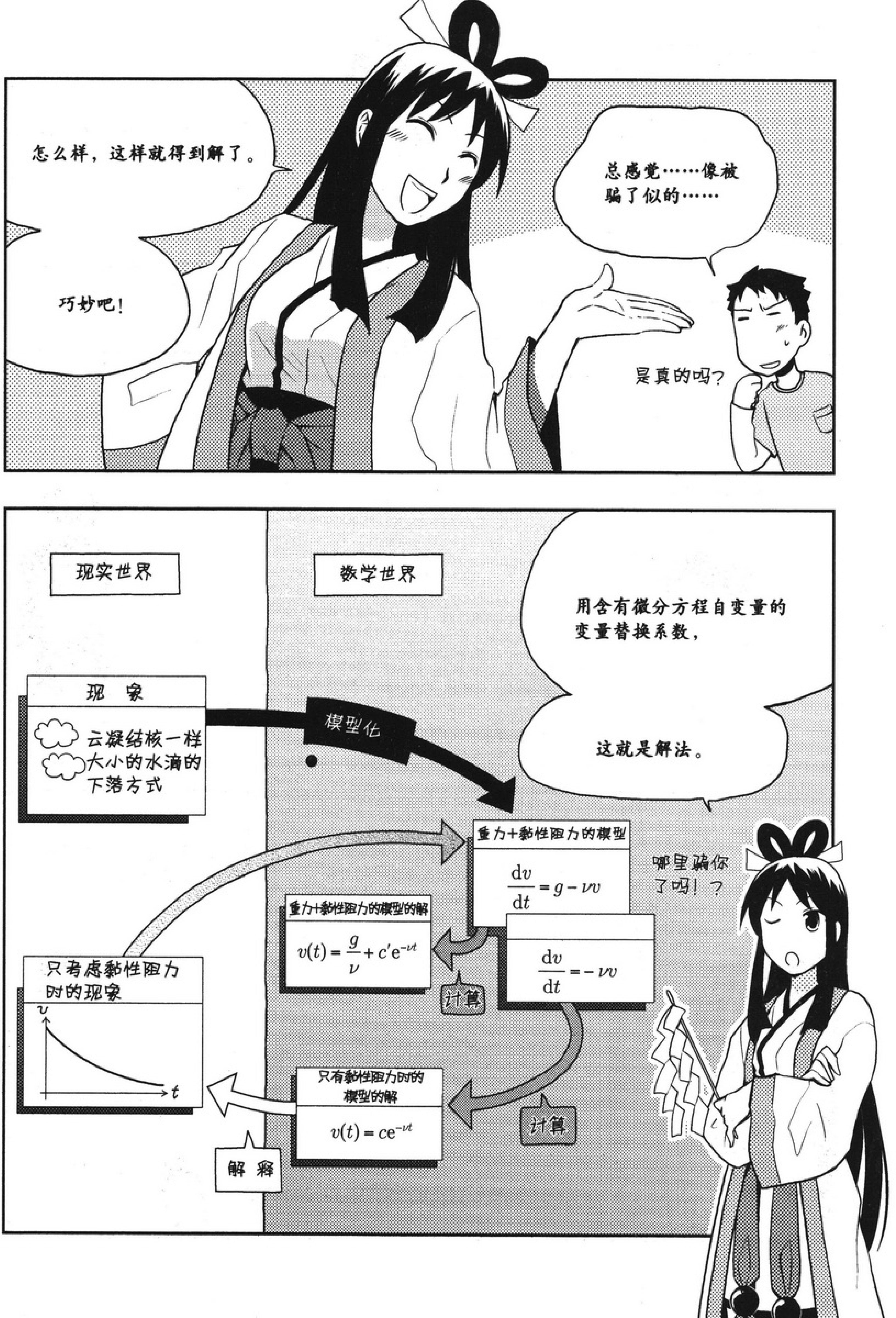
$$c(t) = g\int \mathrm{e}^{\nu t}\mathrm{d}t$$

$$= g\frac{\mathrm{e}^{\nu t}}{\nu} + c'$$

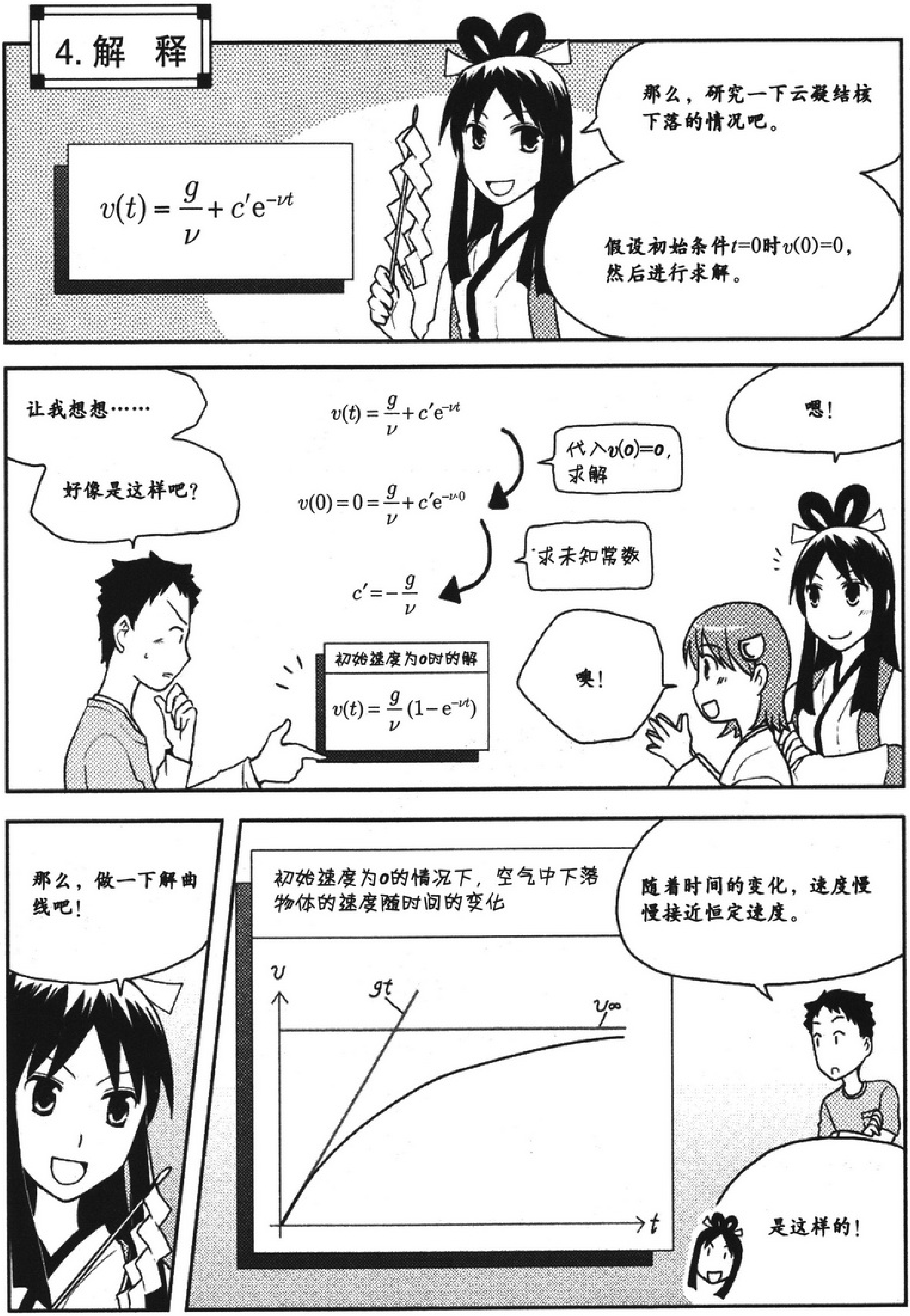
代入假设的解$v(t) = c(t)\mathrm{e}^{-\nu t}$

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= \left(g\frac{\mathrm{e}^{\nu t}}{\nu} + c'\right)\mathrm{e}^{-\nu t} \\ &= \frac{g}{\nu} + c'\mathrm{e}^{-\nu t} \end{aligned}}$$

考虑重力和黏性阻力时的解



怎么样，这样就得到解了。
巧妙吧！
总感觉……像被骗了似的……
是真的吗？
现实世界
数学世界
用含有微分方程自变量的变量替换系数，
这就是解法。
现 象
云凝结核一样大小的水滴的下落方式
模型化
重力+黏性阻力的模型
$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$
重力+黏性阻力的模型的解
$v(t) = \frac{g}{\nu} + c'e^{-\nu t}$
计算
$\frac{dv}{dt} = -\nu v$
只有黏性阻力时的模型的解
$v(t) = ce^{-\nu t}$
计算
只考虑黏性阻力时的现象
v
t
解 释
哪里骗你了吗！？


4. 解 释
$v(t)=\dfrac{g}{\nu}+c'\mathrm{e}^{-\nu t}$
那么，研究一下云凝结核下落的情况吧。
假设初始条件t=0时$v(0)$=0，然后进行求解。
让我想想……
好像是这样吧？
$v(t)=\dfrac{g}{\nu}+c'\mathrm{e}^{-\nu t}$
代入$v(0)=0$，求解
$v(0)=0=\dfrac{g}{\nu}+c'\mathrm{e}^{-\nu 0}$
求未知常数
$c'=-\dfrac{g}{\nu}$
初始速度为0时的解
$v(t)=\dfrac{g}{\nu}(1-\mathrm{e}^{-\nu t})$
嗯！
噢！
那么，做一下解曲线吧！
初始速度为0的情况下，空气中下落物体的速度随时间的变化
v
gt
v_∞
t
随着时间的变化，速度慢慢接近恒定速度。
是这样的！


这叫做终端速度。
终端速度
t趋近于无穷大时，对
$v(t)=\frac{g}{\nu}(1-e^{-\nu t})$求
极限得到的值。
无穷大
∞
这个ν是……
$v_{\infty}=\frac{g}{\nu}$
该式综合了黏性阻力系数和物体质量。
$\nu=\frac{6\pi\eta r}{m}$
利用这个，再还原为黏性阻力系数和物体质量时，
则变成……
终端速度
$v_{\infty}=\frac{mg}{6\pi\eta r}$
噢！
终端速度与重量（重力的大小为mg）成正比！
是啊。
那么存在空气阻力的条件下，重的东西就会更快落下。
终端速度
$v_{\infty}=\frac{mg}{6\pi\eta r}$
速度
恒定
啊
刚开始运动时以恒定的加速度g下落，但是加速度逐渐变小，最后物体以恒定的速度下落。
这个恒定的速度由物体的重量决定。

与假设不存在重力时一样，考虑初速度不为0而为v_0的情况

$$v(t) = \frac{g}{\nu} + c' \mathrm{e}^{-\nu t}$$

代入$v(0) = v_0$进行求解

$$v(0) = v_0 = \frac{g}{\nu} + c' \mathrm{e}^{-\nu 0}$$

求未知的常数

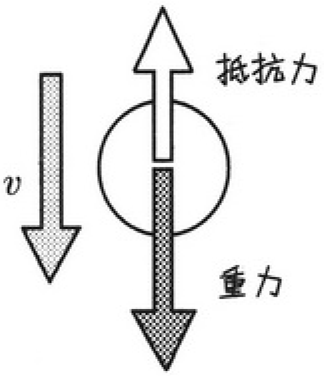
$$c' = v_0 - \frac{g}{\nu}$$

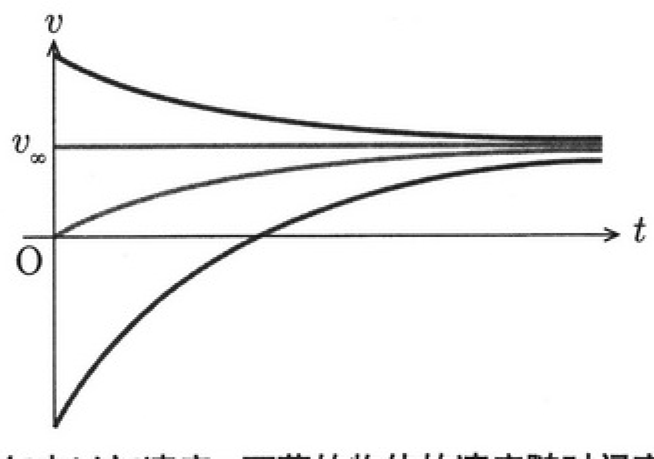
$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= \frac{g}{\nu} + \left(v_0 - \frac{g}{\nu}\right)\mathrm{e}^{-\nu t} \\ &= \frac{g}{\nu}(1 - \mathrm{e}^{-\nu t}) + v_0 \mathrm{e}^{-\nu t} \end{aligned}}$$

初速度为v_0时的解

虽然从刚才的图中可以看到，若初始速度v_0为正，就会向下移动，初始速度v_0为负，就会向上移动……

不管是在哪种条件下，都趋近于终端速度$mg/6\pi\eta r$！





空气中以初速度v_0下落的物体的速度随时间变化


那么，到现在为止，
终于能够解释云彩落不下来的原因了。
如果落下来，还真是令人苦恼啊
明明是水滴嘛
确实……从来也没有落下来过呀！
由于典型的云凝结核半径都能达到10μm=(0.01mm)。
用水的密度1×10³kg/m³能够计算出终端速度。
$$v_\infty=\frac{1\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}\times\frac{4}{3}\pi(10\,\mu\mathrm{m})^3\times9.80\,\mathrm{m/s^2}}{6\pi\times1.8\times10^{-5}\,\mathrm{Pa\cdot s}\times10\,\mu\mathrm{m}}=1.2\times10^{-2}\,\mathrm{m/s}=1.2\,\mathrm{cm/s}$$
啊？
m/s=1.2cm/s
非常缓慢。
云彩
那么，凝聚云彩的水滴以每秒1cm左右的速度落下。
这就是结果！
云凝结核
1秒 1cm
哎！

如果上升气流的速度大于这个速度，
上升气流
虽然水滴在空气中下落，却整体向上运动。
像这样……
喝杯茶
原来如此。
换句话说，
云凝结核在慢慢地下落，但是周围的空气以更快的速度上升，
所以云彩是不会落下来的。
空气的上升速度比云凝结核的下落速度更快时
阻力
上升气流的速度
v_∞
重力
就是那么回事！
原来如此！
到此为止，我们以云凝结核为例，研究了只考虑黏性阻力的情况下小物体的落体运动。
黏性阻力
空气
空气
但是
雨滴、球和人等常见的物体落下的情况是什么样呢？
哈——
跳伞运动
只要考虑惯性阻力就足够了。

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-\frac{1}{4}\pi\rho r^2v^2$$

只考虑惯性阻力的情况下的运动方程

由于重力与阻力达到平衡，加速度dv/dt最终变成0，只考虑惯性阻力时的终端速度v_∞为

$$mg=\frac{1}{4}\pi\rho r^2v_\infty^2$$

$$v_\infty=\sqrt{\frac{4mg}{\pi\rho r^2}}$$

只考虑惯性阻力情况下的终端速度

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=g-\frac{g}{v_\infty^2}v^2\\&=\frac{g}{v_\infty^2}\left(v_\infty^2-v^2\right)\\&=\frac{g}{v_\infty^2}(v_\infty-v)(v_\infty+v)\end{aligned}}$$

两边取倒数

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}=\frac{v_\infty^2}{g}\frac{1}{(v_\infty-v)(v_\infty+v)}$$

分解右边分数

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}=\frac{v_\infty}{2g}\left(\frac{1}{v_\infty-v}+\frac{1}{v_\infty+v}\right)$$

分离变量进行积分

$$\int\mathrm{d}t=\int\frac{v_\infty}{2g}\left(\frac{1}{v_\infty-v}+\frac{1}{v_\infty+v}\right)\mathrm{d}v$$

$$\begin{aligned}t&=\frac{v_\infty}{2g}(-\ln|v_\infty-v|+\ln|v_\infty+v|)+C\\&=\frac{v_\infty}{2g}\ln\left|\frac{v_\infty+v}{v_\infty-v}\right|+C\end{aligned}$$

想得知静止物体开始落下时的样子，设$t=0$时刻时$v(0)=0$，那么积分常数就变成如下所示。

$$0=\frac{v_\infty}{2g}\ln\left|\frac{v_\infty+0}{v_\infty-0}\right|+C$$

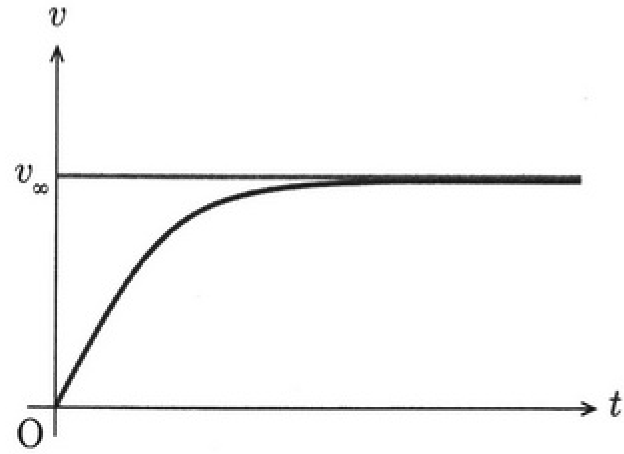
$$\therefore C=0$$

由于物体的速度v不可能大于终端速度v_∞，所有去掉绝对值符号也没有关系，最后所求得的速度如下所示。

$$t=\frac{v_\infty}{2g}\ln\frac{v_\infty+v}{v_\infty-v}$$

$$\boxed{\therefore v=\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{v_\infty}{2g}t}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{v_\infty}{2g}t}}\cdot v_\infty=v_\infty\tanh\frac{gt}{v_\infty}}$$

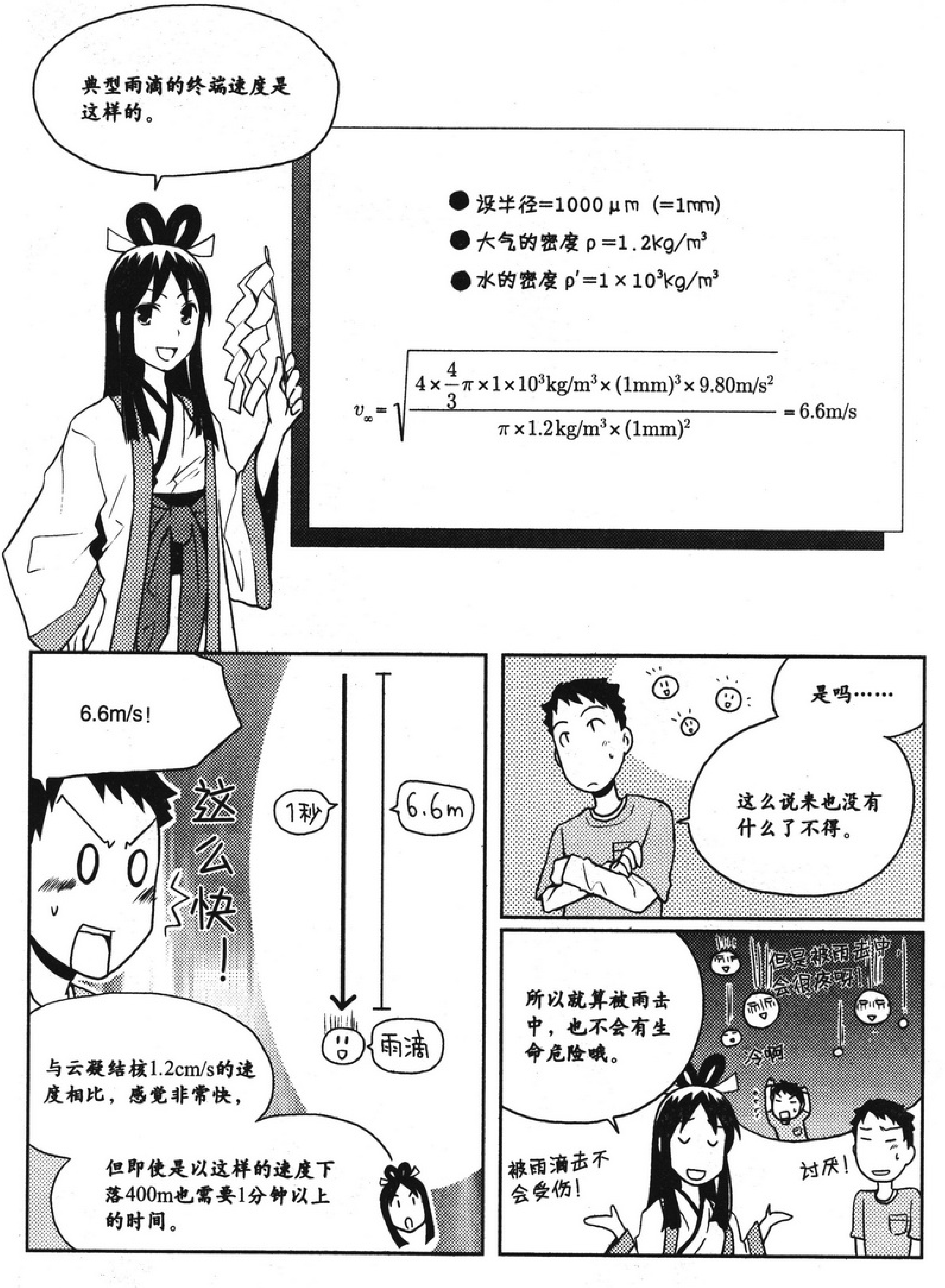
只考虑黏性阻力时的解



初速度为0时，空气中下落物体的速度随时间的变化（惯性阻力的情况）

虽然曲线与黏性阻力非常相似，但是这个曲线更陡一些。

※$\tanh x=\sinh x/\cosh x$。


典型雨滴的终端速度是这样的。
● 设半径=1000μm (=1mm)
● 大气的密度 ρ=1.2kg/m³
● 水的密度 ρ'=1×10³kg/m³
$v_\infty=\sqrt{\dfrac{4\times\dfrac{4}{3}\pi\times1\times10^3\mathrm{kg/m^3}\times(1\mathrm{mm})^3\times9.80\mathrm{m/s^2}}{\pi\times1.2\mathrm{kg/m^3}\times(1\mathrm{mm})^2}}=6.6\mathrm{m/s}$
6.6m/s!
这么快!
1秒
6.6m
雨滴
与云凝结核1.2cm/s的速度相比，感觉非常快，
但即使是以这样的速度下落400m也需要1分钟以上的时间。
是吗……
这么说来也没有什么了不得。
所以就算被雨击中，也不会有生命危险哦。
但是被雨击中会很疼呀!
冷啊
被雨滴击不会受伤!
讨厌!


怎么样？这回明白“逐渐变化最终恒定”模型的研究方法了吧？
是的！
下次，我们着手解决“增减不定”的摇摆式运动模型。
……好的！
又是这么麻烦……
这是我最后一讲了。
……是这样，
啊……
……
！！
啊，好的！
认真学习到最后！
……大地！
吃点心的时间都没有，我要喝茶！
雾……散了！
好的！
呵呵

5. 常数变易法

让我们再回顾一下如何推导出考虑黏性阻力时，物体落体运动微分方程的解。

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \nu v \quad \leftarrow \text{要求解的微分方程} \tag{4.1}$$

由于不是可分离变量微分方程，因此无法求解，那么暂且忽略右边第一项中的g（暂时设为没有），那么就可以变成可分离变量微分方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\nu v \quad \leftarrow \text{化为可分离变量微分方程} \tag{4.2}$$

就可以求解了。得到的解为

$$v(t) = c\mathrm{e}^{-\nu t} \quad \leftarrow \text{通解} \tag{4.3}$$

由于含有任意常数c（求n阶微分方程的解时，不适用初始条件等条件并含有n个任意常数的解叫做通解），设初始条件为t=0时$v(0)$=v_0，可得到特解

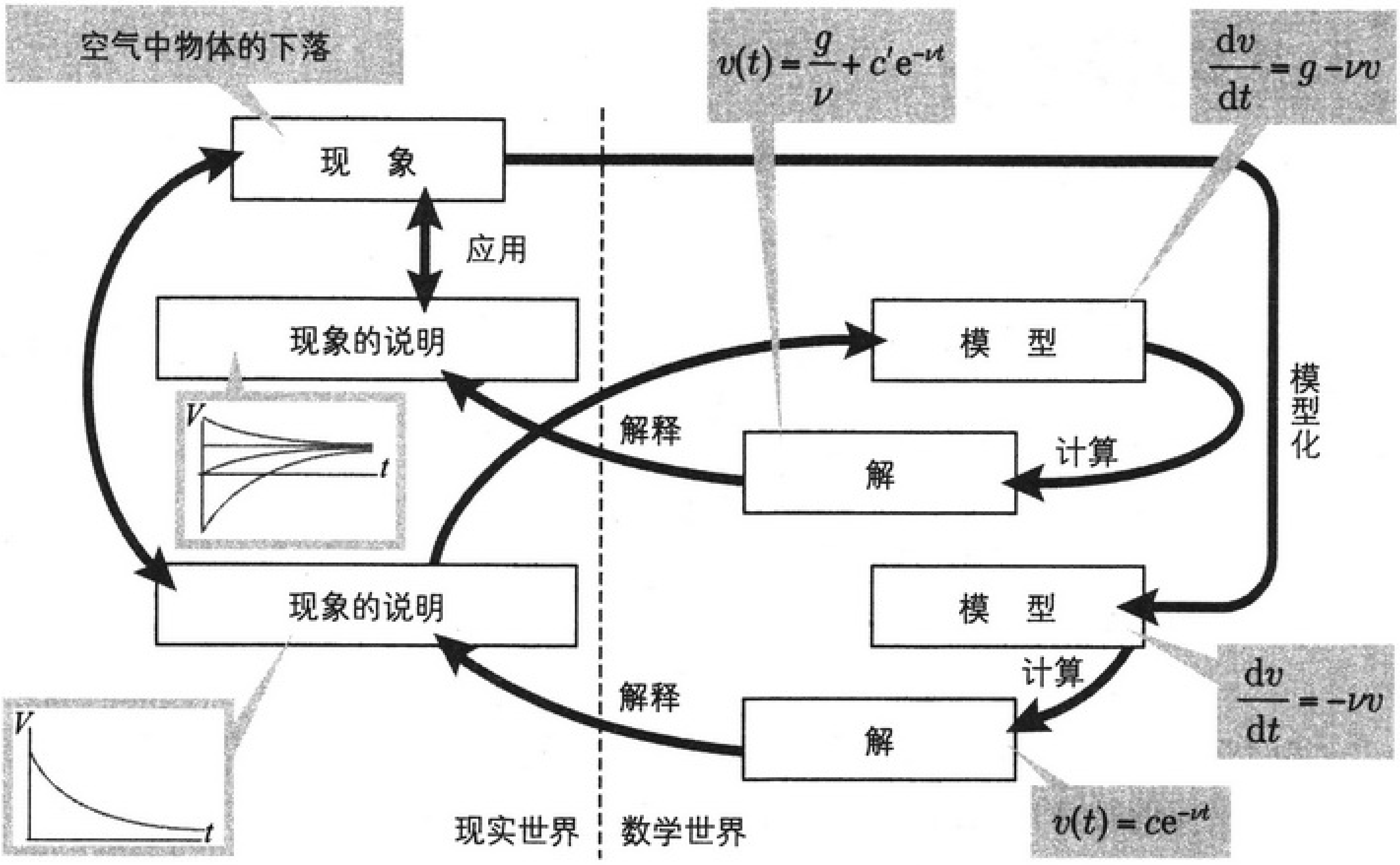
$$v(t) = v_0\mathrm{e}^{-\nu t} \quad \leftarrow \text{特解} \tag{4.4}$$

（在通解的任意常数中代入特定数值得到的特定的解叫做特解）。若想求可分离变量微分方程（4.2）的解，那么到此为止就可以结束了，但是现在想求解的是微分方程（4.1），需要对可分离变量微分方程的解进行补充。假设通解（4.3）的任意常数c为时间t的函数$c(t)$，则函数化为

$$v(t) = c(t)\mathrm{e}^{-\nu t} \quad \leftarrow \text{假设任意常数}c\text{为时间}t\text{的函数}c(t) \tag{4.5}$$

把假设的解代入原来的微分方程（4.1）中就能确定函数$c(t)$,得到解

$$v(t) = \frac{g}{\nu} + c'\mathrm{e}^{-\nu t} \quad \leftarrow \text{想要求解的微分方程的解} \tag{4.6}$$



进行两次循环之后得到期待的结果

◆ **考虑黏性阻力情况下物体在空气中下落的模型**

虽然已经得到方程的解，但也会对这个解法的普遍性有所顾虑。那么，我们试着把这个方法一般化[1]。

用一般函数$p(x)$和$q(x)$表达要求解的方程（4.1），则可以写成

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \qquad \leftarrow \text{非同次方程式} \tag{4.7}$$

在考虑黏性阻力时物体在空气中的落体运动方程（4.1）中，$p(x)$和$q(x)$都是常数，但是一般来说表示为x的函数较好。一方面，没有重力的情况下的运动方程（4.2）变成

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \qquad \leftarrow \text{同次方程式} \tag{4.8}$$

虽然两个都是线性微分方程，但是含不含$q(x)$项会有所不同。若（4.8）中没有$q(x)$项，微分方程中关于y和$\frac{dy}{dx}$的各项具有相同次数，这种形式的微分方程叫做齐次方程。式（4.7）中，由于含有$q(x)$项，不能变成相同次数，因此叫做非齐次微分方程，$q(x)$叫做非齐次项。

1 这也是数学的优势之一。

设积分常数为C，对齐次方程（4.8）进行变量分离，可得到

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x+C}=\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \leftarrow \text{齐次方程的通解} \tag{4.9}$$

这是含有任意常数的通解。用变量x的函数$c(x)$替换齐次方程的通解中包含的积分常数C，则

$$y=\mathrm{e}^{C(x)}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \leftarrow \text{用函数替换齐次方程通解中的常数}$$

另外，为免于复杂，用$c(x)$替换$\mathrm{e}^{C(x)}$，则

$$y=c(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \leftarrow \text{假设的非齐次方程的解} \tag{4.10}$$

把上式带入非齐次方程（4.7），求解假设的函数$c(x)$

$$\frac{\mathrm{d}c(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x}+p(x)c(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+c(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x}+p(x)c(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+c(x)(-p(x))\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+p(x)c(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

则函数$c(x)$为

$$c(x)=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c' \quad \leftarrow \text{假设的函数}$$

把所求得的假设的函数$c(x)$带入假设的非齐次方程的解（4.10）中，则

$$y=\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c'\right)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \leftarrow \text{非齐次方程的通解} \tag{4.11}$$

这样就求出了此非齐次方程的通解。

那么，展开非齐次微分方程的通解（4.11），则

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c'\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

由于$c'=e^{C}$，得知上式为齐次方程的通解（4.9）

$$c'\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \leftarrow \text{齐次方程的通解}$$

与非齐次方程的特解

$$e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \quad \leftarrow \text{非齐次方程的特解}$$

的和。也就是说，非齐次方程的通解是齐次方程的通解与非齐次方程特解的和。

非齐次方程的通解 = **齐次方程的通解** + **非齐次方程的特解**

◆ 非齐次方程的解

确认一下。齐次微分方程（4.8）的解为$y=u(x)$,则

$$\frac{du(x)}{dx}+p(x)u(x)=0 \tag{4.12}$$

成立。另外，若得知$y=v(x)$为非齐次方程（4.7）的某个解，则

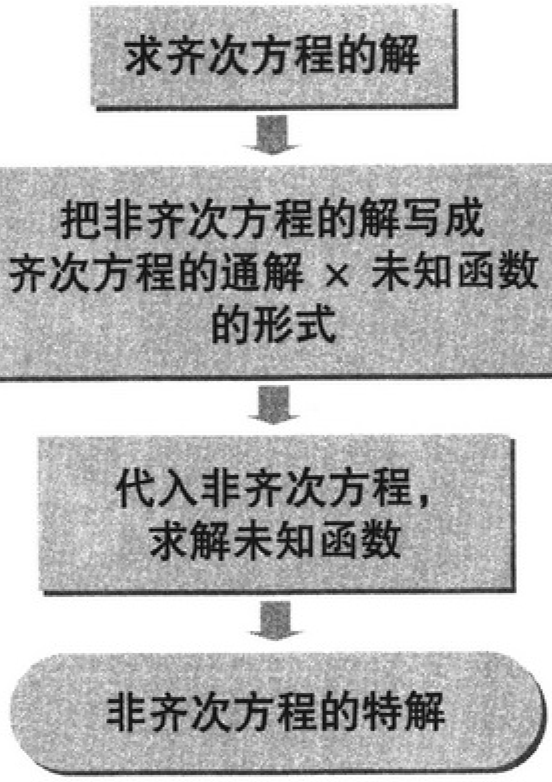
$$\frac{dv(x)}{dx}+p(x)v(x)=q(x) \tag{4.13}$$

成立。分别将齐次方程关系式（4.12）和非齐次方程关系式（4.13）的两边相加，得到

$$\frac{d(u(x)+v(x))}{dx}+p(x)(u(x)+v(x))=q(x)$$

因此得知$y=u(x)+v(x)$为非齐次方程（4.7）的解。通过这个解法就能够求出非齐次微分方程的解。

这种解非齐次方程的方法叫做常数变易法。为求非齐次微分方程的解，将齐次方程通解中的常数进行变易（把非齐次方程的解写成齐次方程的通解×未知函数的形式），由此产生了这样的叫法。



◆ 求解非齐次方程的方法

运用常数变易法时，首先在要求解的微分方程中，求出求解较容易部分的微分方程（齐次方程）的解，之后对其进行补充，以满足要求解的微分方程（非齐次方程）的求解方法。先不要被微分方程的形式所限制，从较容易求解（可求解）的部分开始求解，后续对细小的部分进行修正即可。这是一个非常好用的方法。比如空气中物体落体运动的例子，随着时间的变化物体以指数函数的方式运动，因此要先求出这个部分的解，然后再进行补充以满足要求解的微分方程，让一切都合乎逻辑即可。

第5章

二阶线性微分方程

——不只是摇摆运动

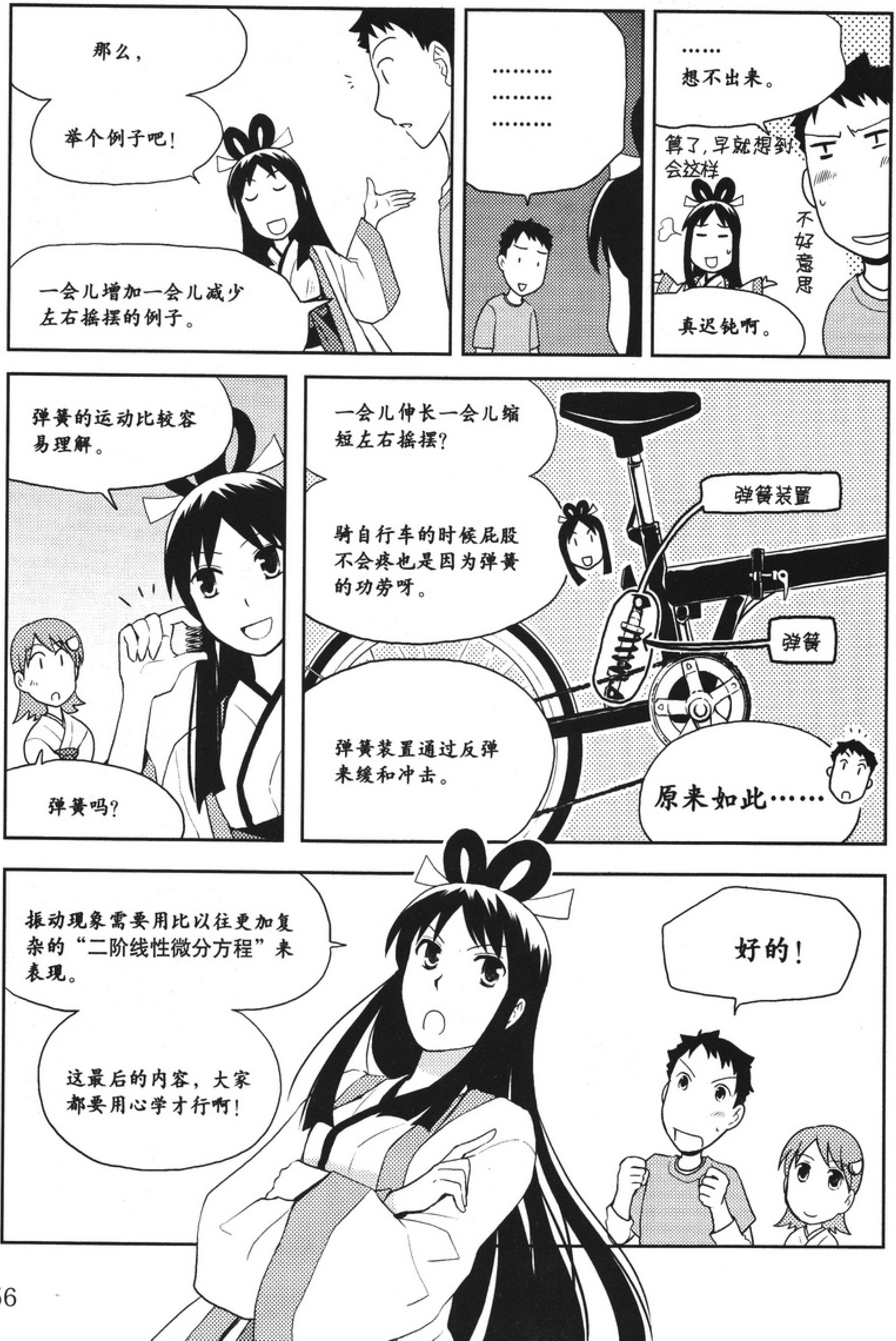
1. 振动现象

啊……
怎么会这样！
わいわい
わいわい
这个神社真是太棒了！
参拜几次愿望就会实现！
妻子也回来了！
啊……这个家伙……
数学女神万岁!万岁!
真是过分……
女神！
女、女……

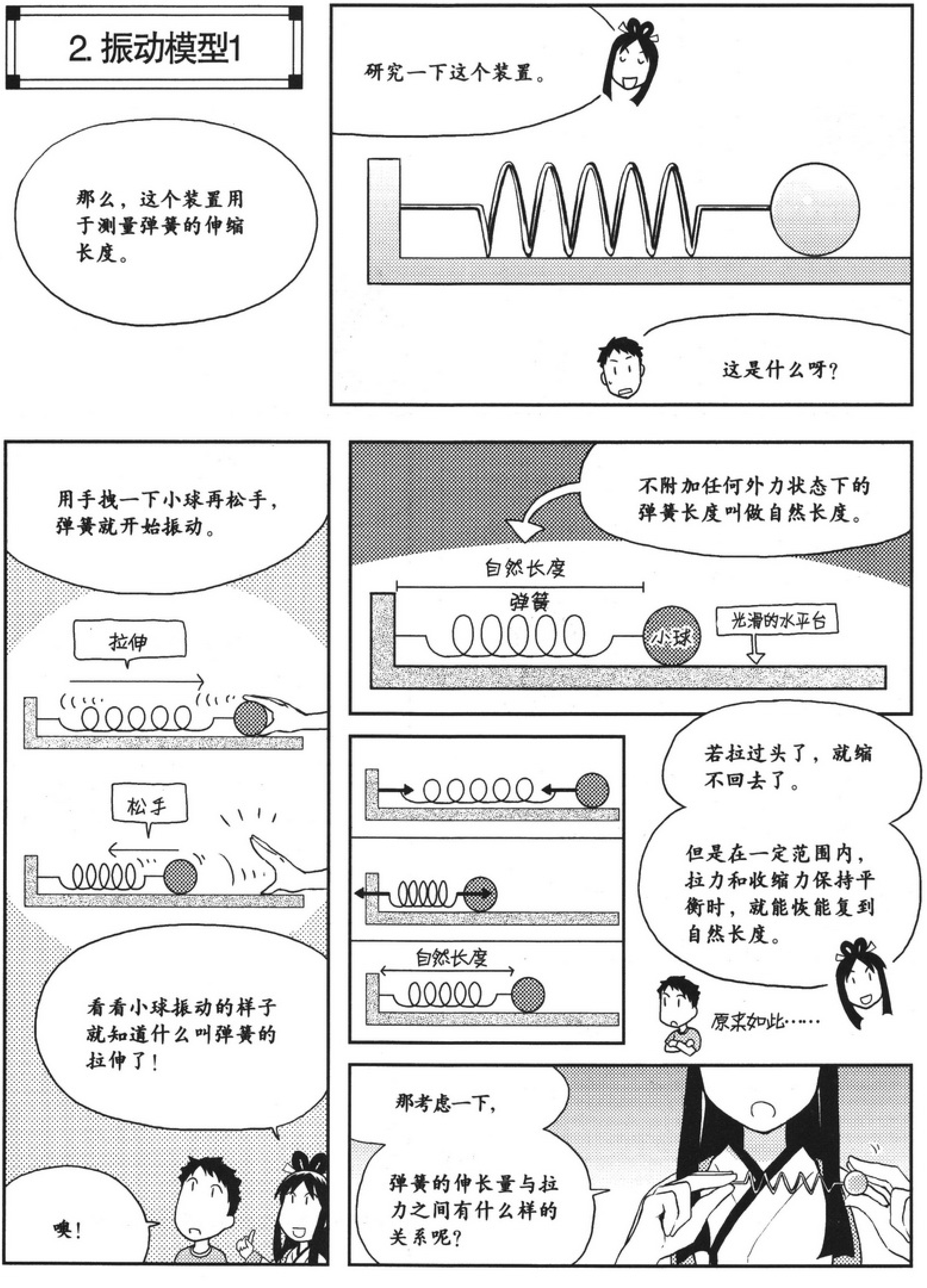

真不愧是
女神啊！
哎呀！
放手啊！
那个家伙靠自己
的力量解决问题
的呀！
我什么忙也
没帮啊！
以这种趋势继续下去
的话，我们内部也会
平安的！
若可以的话，一
定要呈指数函数
式的增加！
听我说！
若以这个势头
工作的话……
就成鬼怪了。
来这里参拜的
话，总觉得会
变得更加精力
充沛啊。
啊，明白了。
……
……简直毫
无办法。
喂，
加油啊！
年轻人


啊
疲惫不堪！
已经不行了。
ぐったり
疲惫的时候，吃点甜点吧。
啊！
请慢用，女神！
嗅
水木……
可以吃东西吗？……
到达极限
可以呀。
嗯！
真好吃啊！是哪家的点心呀？


是我做的，
作为谢礼！
嘿嘿
你！
大地真是好了不起啊！
虽然外观不太好看……
呵
真挑剔！
嗯，
味道很不错啊。
啊呜
那么，
开始上最后一堂课吧！
请多关照啊！
今天我们要在数学世界中表现振动现象。
振动
振动不就是一会儿增加一会儿减少左右摇摆的现象吗！
世界上所有的东西都在振动着，
把振动理解了，总觉得会很有帮助的。
是吗……

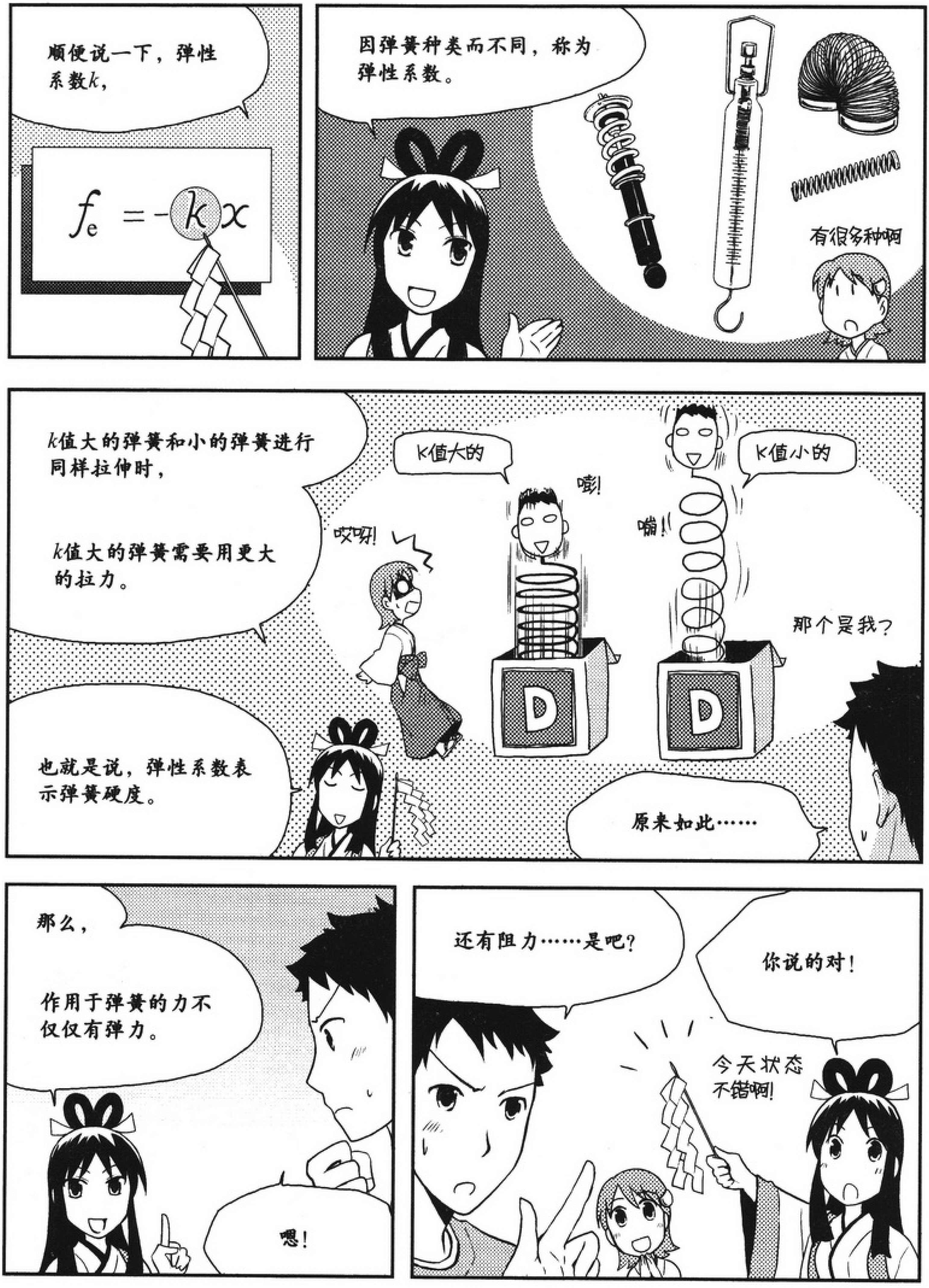

那么，
举个例子吧！
一会儿增加一会儿减少左右摇摆的例子。
………
………
………
……
想不出来。
算了，早就想到会这样
不好意思
真迟钝啊。
弹簧的运动比较容易理解。
弹簧吗？
一会儿伸长一会儿缩短左右摇摆？
骑自行车的时候屁股不会疼也是因为弹簧的功劳呀。
弹簧装置
弹簧
弹簧装置通过反弹来缓和冲击。
原来如此……
振动现象需要用比以往更加复杂的“二阶线性微分方程”来表现。
这最后的内容，大家都要用心学才行啊！
好的！

2. 振动模型1



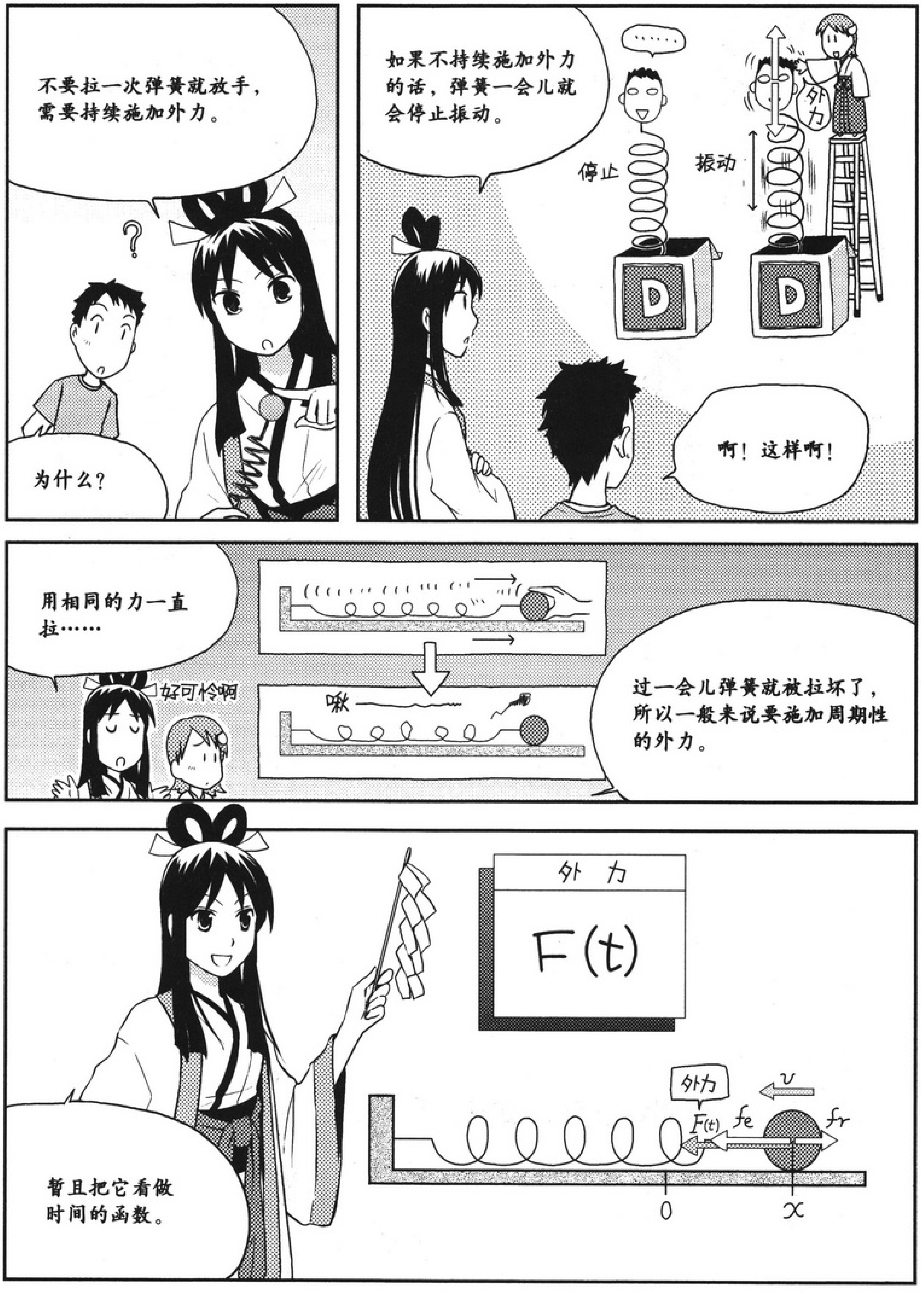
研究一下这个装置。
这是什么呀?
那么,这个装置用于测量弹簧的伸缩长度。
用手拽一下小球再松手,弹簧就开始振动。
拉伸
松手
看看小球振动的样子就知道什么叫弹簧的拉伸了!
噢!
不附加任何外力状态下的弹簧长度叫做自然长度。
自然长度
弹簧
小球
光滑的水平台
若拉过头了,就缩不回去了。
但是在一定范围内,拉力和收缩力保持平衡时,就能恢能复到自然长度。
自然长度
原来如此……
那考虑一下,
弹簧的伸长量与拉力之间有什么样的关系呢?

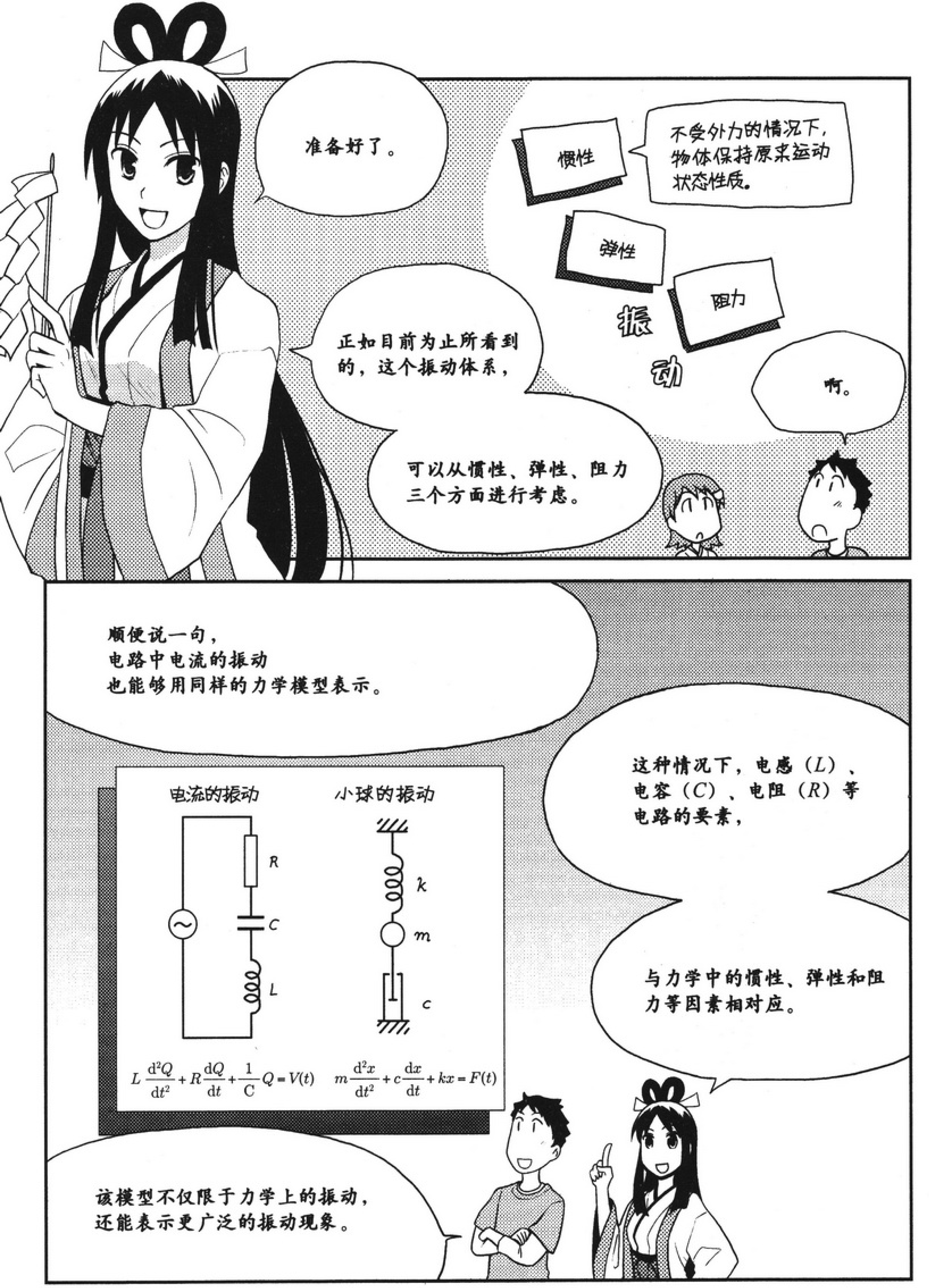

嗯……
弹簧的拉力……
与伸长量成正比吧？
比 例
照你这么说，
弹簧的收缩力与收缩量也是同样的关系啦！
收缩、拉伸说起来怪麻烦的，要不把收缩叫做“反方向拉伸”吧！
反方向拉伸
那么，弹簧保持自然长度时，小球的位置叫做原点，设小球的伸长量为x，则可以得到如下的关系式。
x
原点
0
fe(弹簧的力)
x
原点
0
x
伸长量
嗯，
拉伸弹簧时，
小球的受力方向是拉伸的相反方向……
这样啊？
$f_e = -kx$
弹簧的伸长量：x
弹力：fe
弹性系数：k
是呀！
这个关系式叫做胡克定律，所受的力叫做弹力。
这是图示
弹 力
F
x
-kx

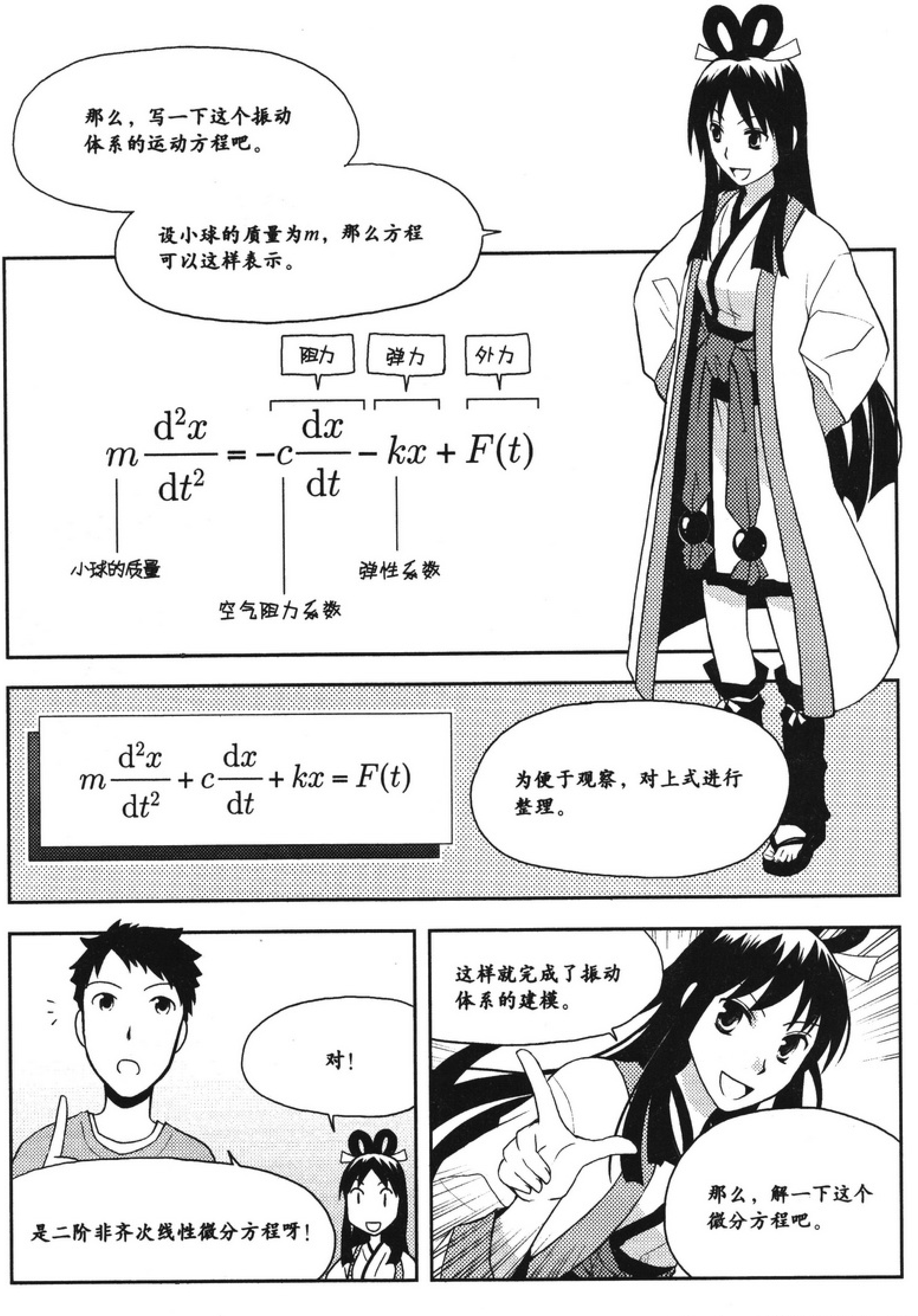


顺便说一下，弹性系数k，
$f_e = -kx$
因弹簧种类而不同，称为弹性系数。
有很多种啊
k值大的弹簧和小的弹簧进行同样拉伸时，
k值大的弹簧需要用更大的拉力。
K值大的
嘭!
K值小的
嘣!
哎呀!
那个是我？
也就是说，弹性系数表示弹簧硬度。
原来如此……
那么，
作用于弹簧的力不仅仅有弹力。
嗯!
还有阻力……是吧？
你说的对!
今天状态不错啊!


阻力以空气阻力和摩擦力的形式作用于运动的相反方向。
这里，我们只考虑与小球滑动速度成正比的阻力。
弹力
v
阻力
f_e
f_r
原点
0
弹簧的拉伸
x
嗯……
若用fr表示阻力，就可以用小球的位置随时间的变化表示小球的滑动速度。
阻 力
f_r
比例常数
c
比例常数用c表示。
就变成这样！
阻 力
$f_r = -cv = -c\dfrac{dx}{dt}$
做出来了！
可以用这个建立模型吗？
还不能。
诶？
还需进一步施加外力。
外力？

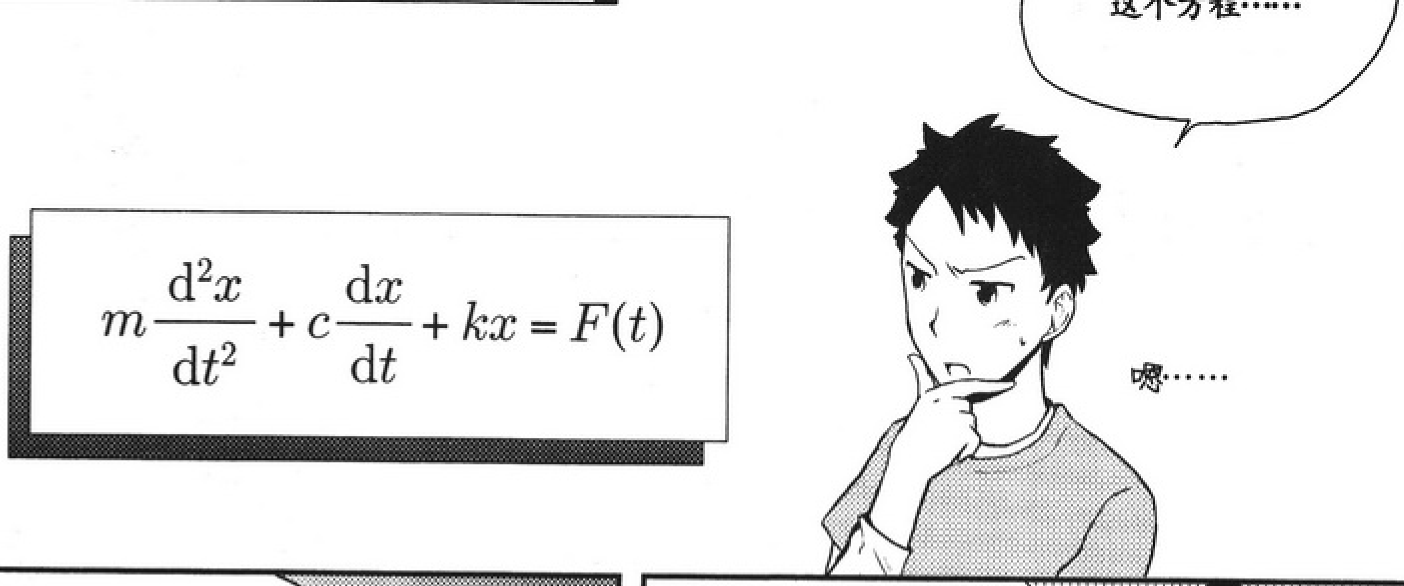

不要拉一次弹簧就放手，需要持续施加外力。
?
为什么？
如果不持续施加外力的话，弹簧一会儿就会停止振动。
……
停止
振动
外力
D
D
啊！这样啊！
用相同的力一直拉……
啾
好可怜啊
过一会儿弹簧就被拉坏了，所以一般来说要施加周期性的外力。
外 力
F(t)
外力
v
$F(t)$
f_e
f_r
0
x
暂且把它看做时间的函数。


准备好了。
惯性
不受外力的情况下，物体保持原来运动状态性质。
弹性
阻力
振动
正如目前为止所看到的，这个振动体系，
可以从惯性、弹性、阻力三个方面进行考虑。
啊。
顺便说一句，电路中电流的振动也能够用同样的力学模型表示。
电流的振动
小球的振动
R
C
L
k
m
c
$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=V(t)$
$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$
这种情况下，电感（L）、电容（C）、电阻（R）等电路的要素，
与力学中的惯性、弹性和阻力等因素相对应。
该模型不仅限于力学上的振动，还能表示更广泛的振动现象。



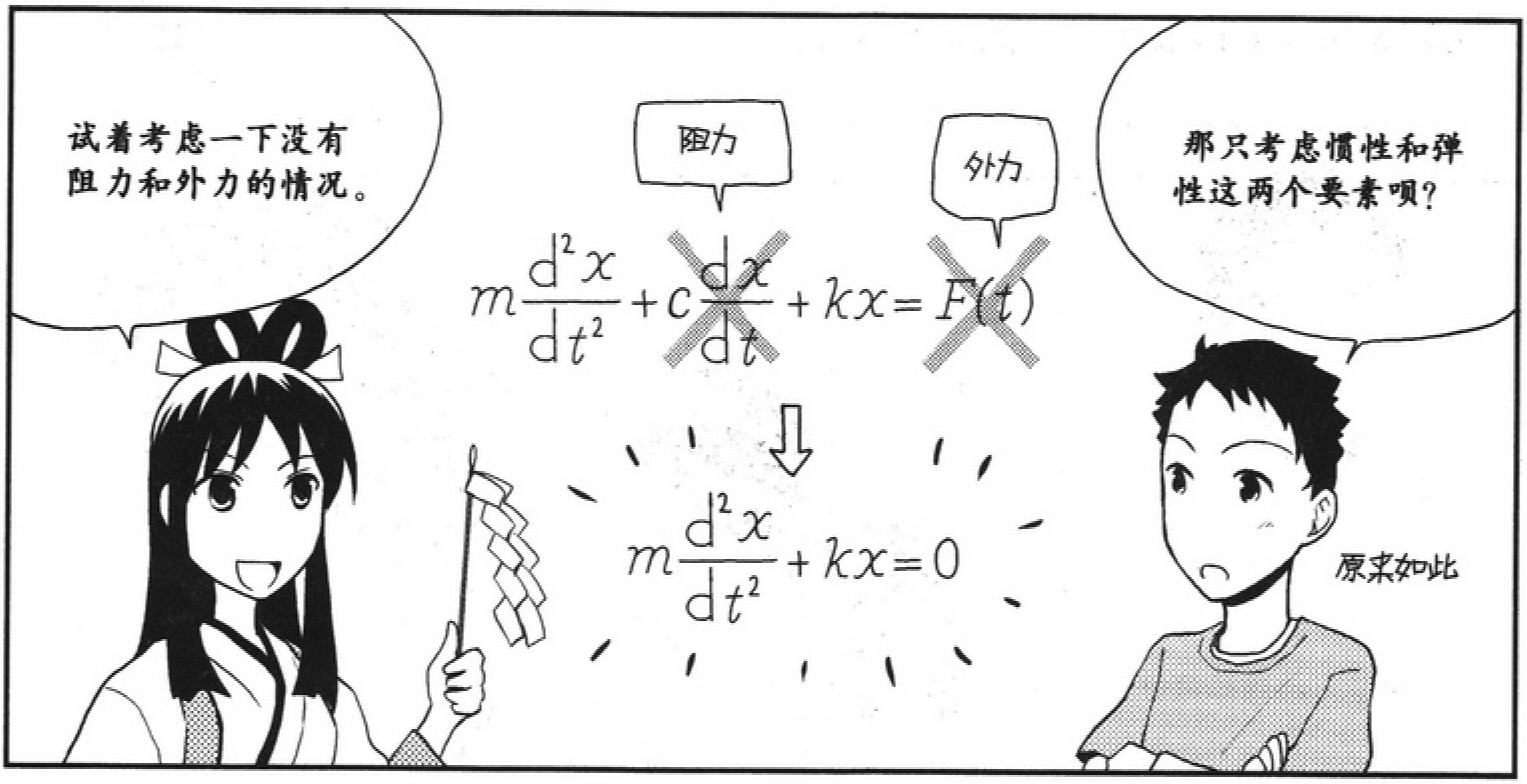
那么，写一下这个振动体系的运动方程吧。
设小球的质量为m，那么方程可以这样表示。
阻力
弹力
外力
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-kx+F(t)$$
小球的质量
空气阻力系数
弹性系数
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=F(t)$$
为便于观察，对上式进行整理。
对！
是二阶非齐次线性微分方程呀！
这样就完成了振动体系的建模。
那么，解一下这个微分方程吧。

3. 振动模型2 简谐振动

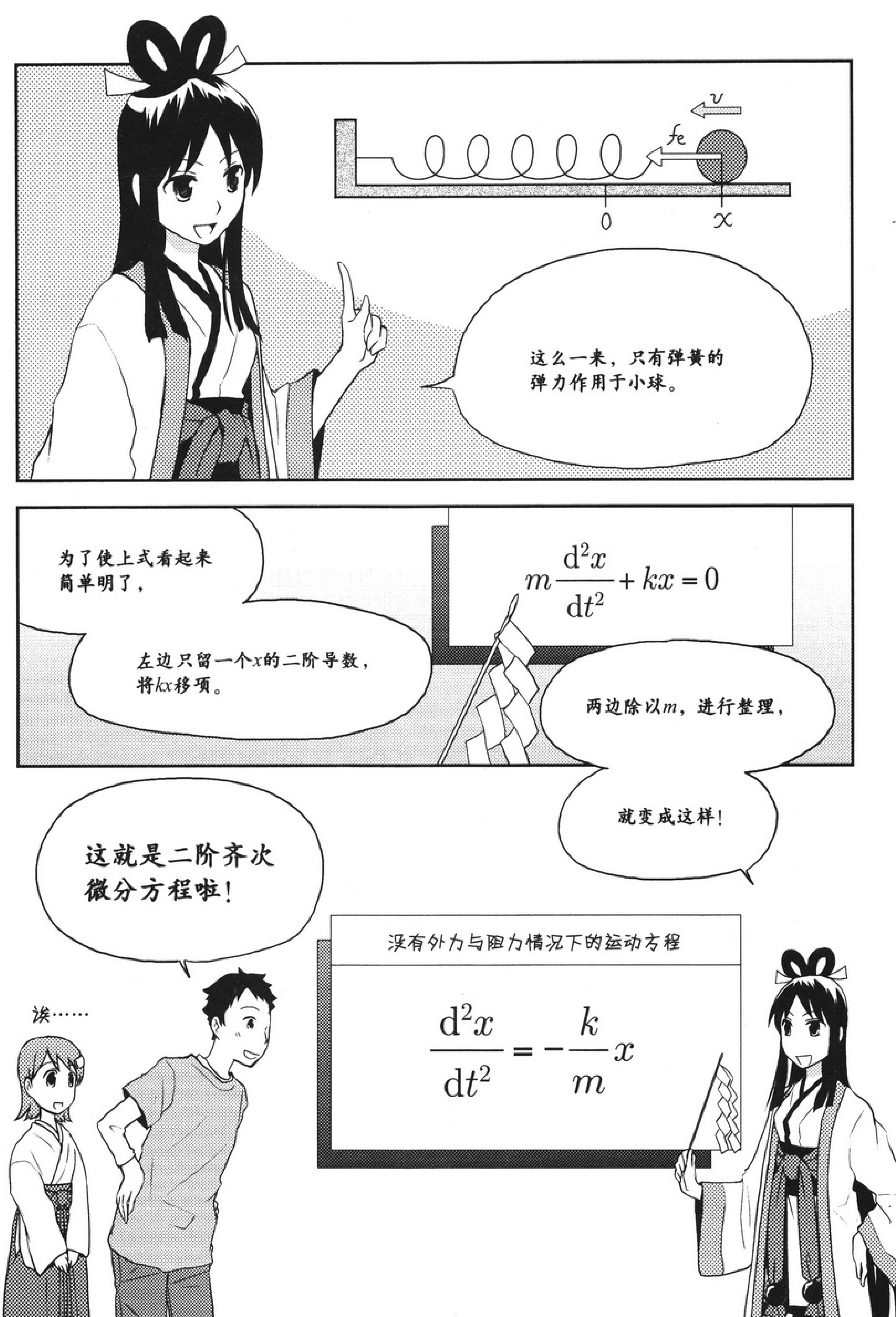


这个方程……
$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$
嗯……

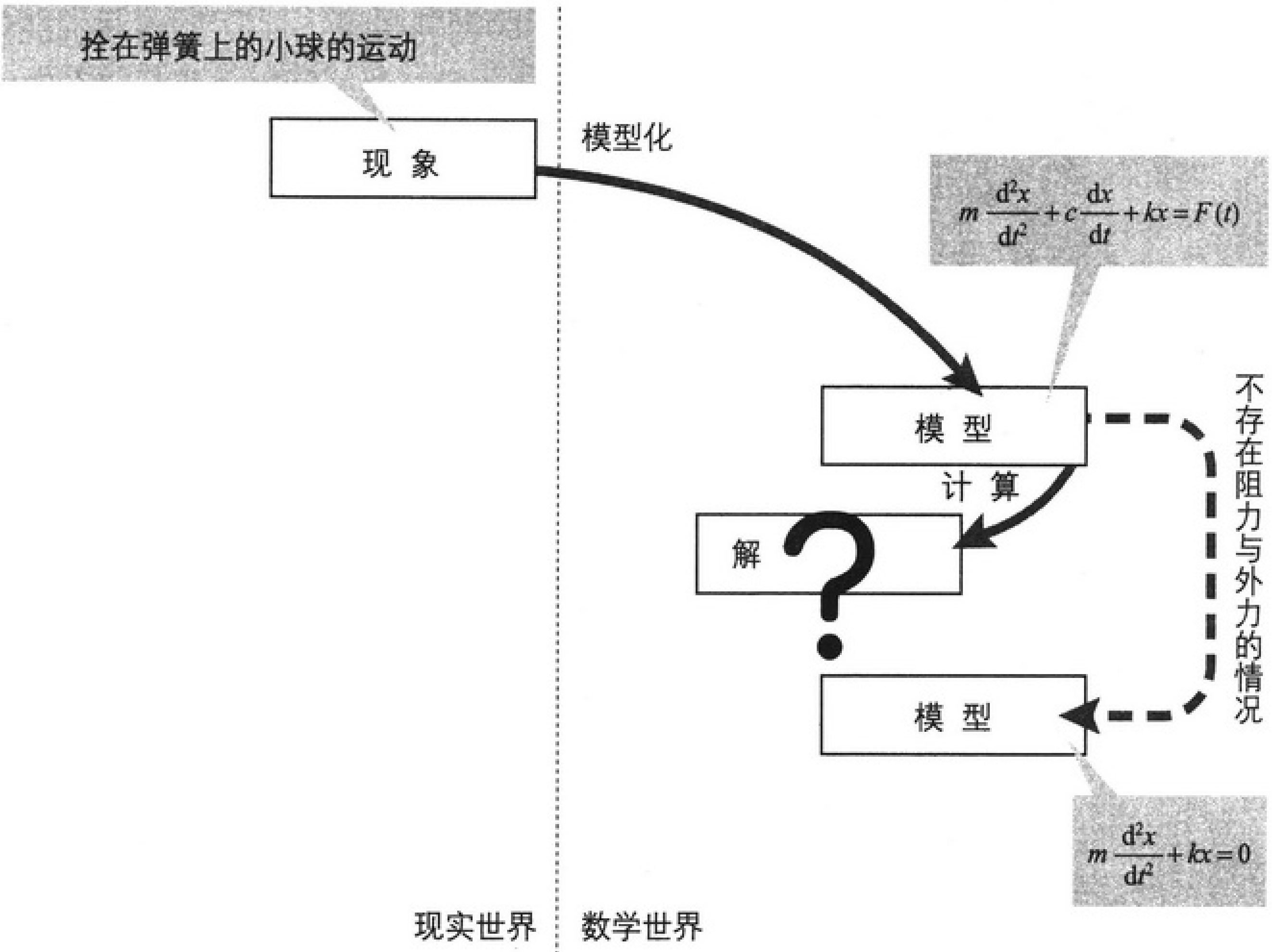
这个方程到底从哪儿分解好呢……
不好解啊！
$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$
好复杂呀
这时，先把问题进行简化……
比如刚才这种情况该怎么弄？



试着考虑一下没有阻力和外力的情况。
阻力
外力
$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\cancel{\frac{dx}{dt}}+kx=\cancel{F(t)}$
$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$
那只考虑惯性和弹性这两个要素呗？
原来如此


v
f_e
0
x
这么一来，只有弹簧的弹力作用于小球。
为了使上式看起来简单明了，
$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$
左边只留一个x的二阶导数，将kx移项。
两边除以m，进行整理，
就变成这样！
这就是二阶齐次微分方程啦！
没有外力与阻力情况下的运动方程
$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{k}{m}x$
诶……

整个流程就是这样的。刚开始考虑的模型较难，不知道如何用数学知识处理才好，通过对现象进行简化、对方程进行降阶，就可以重新考虑这个模型啦。



◆ 在没有阻力和外力的情况下，拴在弹簧上的小球的运动模型

是。

那么，试着求一下不存在阻力与外力情况下的通解。请仔细观察这个微分方程。

又看啊？

要目不转睛地看！x对t进行两次微分，虽说带k/m这个系数，但是再回到$-x$，注意这个式子[1]。

微分两次就能变回原函数…… 好像在哪里看见过呀！

1 不认真看，是不会注意到的。

53页中正弦函数的微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t=\cos t$$

再一次对t进行微分，再套用余弦函数的微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t=-\sin t$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sin t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t=-\sin t$$

这样两次求导之后变成原函数。巧妙运用三角函数的这种性质，就能够得到方程的解。不过，有人会考虑在二阶齐次微分方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k}{m}x$中，有$k/m$这个系数，该怎么处理呢。利用微分的基本性质之一，设ω为常数，则

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sin\omega t=\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\omega t=-\omega^2\sin\omega t$$

实际上，设

$$\frac{k}{m}=\omega^2 \tag{5.1}$$

便得知

$$x(t)=\sin\omega t \tag{5.2}$$

为微分方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k}{m}x$ 的解。太好了！太好了！

不过，且慢。就只有这一个解吗？解（5.2）的整数倍

$$x(t)=A\sin\omega t \tag{5.3}$$

也是微分方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k}{m}x$的解。

把这个整数倍的解代入到微分方程中就能确认是不是方程的解。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}A\sin\omega t=-\omega^2A\sin\omega t$$

另外，将余弦函数的微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t=-\sin t$$

对t进行微分，利用正弦函数的微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t$$

可得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = -\cos t$$

设B为常数，

$$x(t) = B\cos\omega t \tag{5.4}$$

也是微分方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$的解。

实际上，通解就是解（5.3）和（5.4）的线性组合[2]。

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{5.5}$$

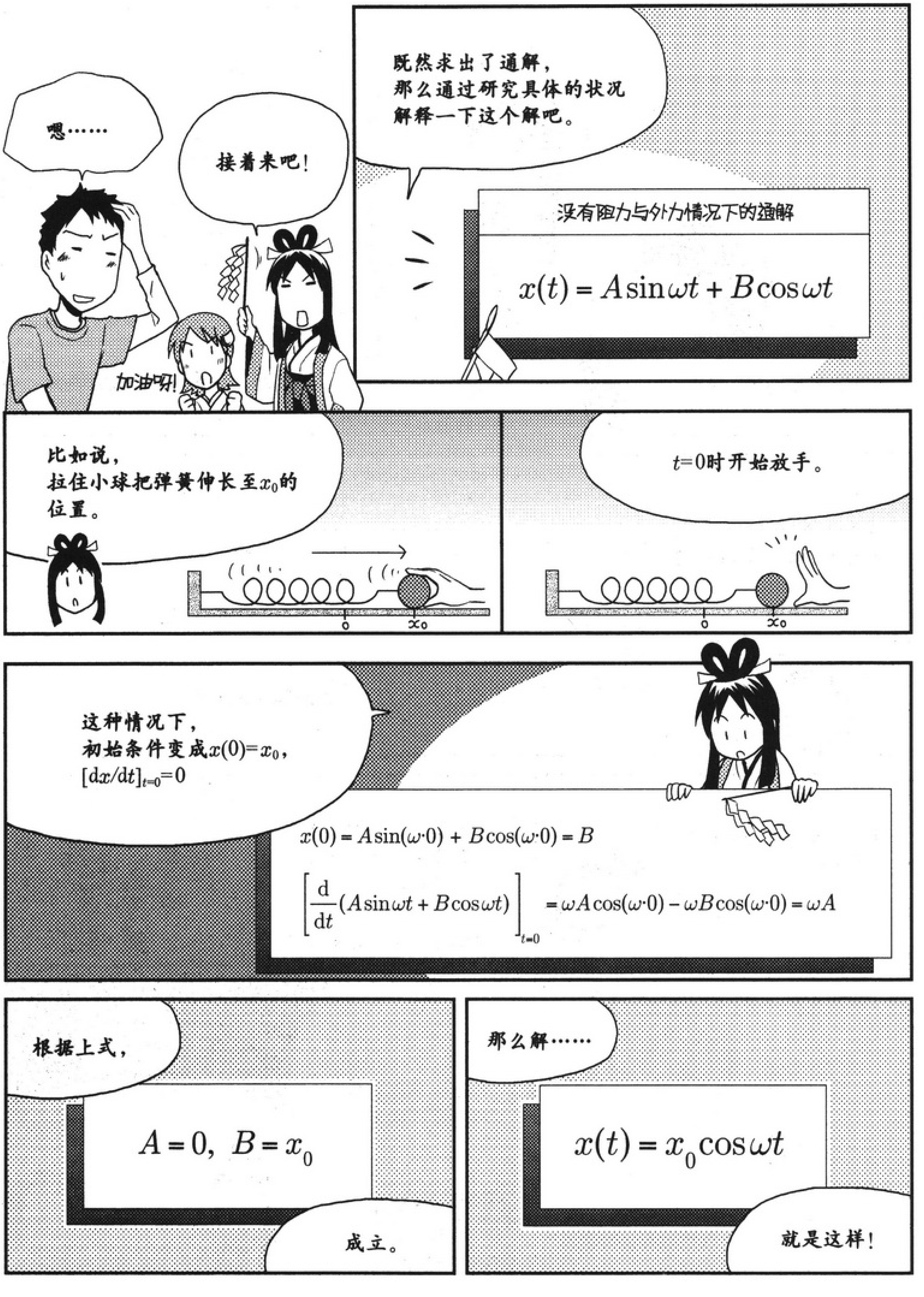
就是没有阻力与外力情况下的通解。

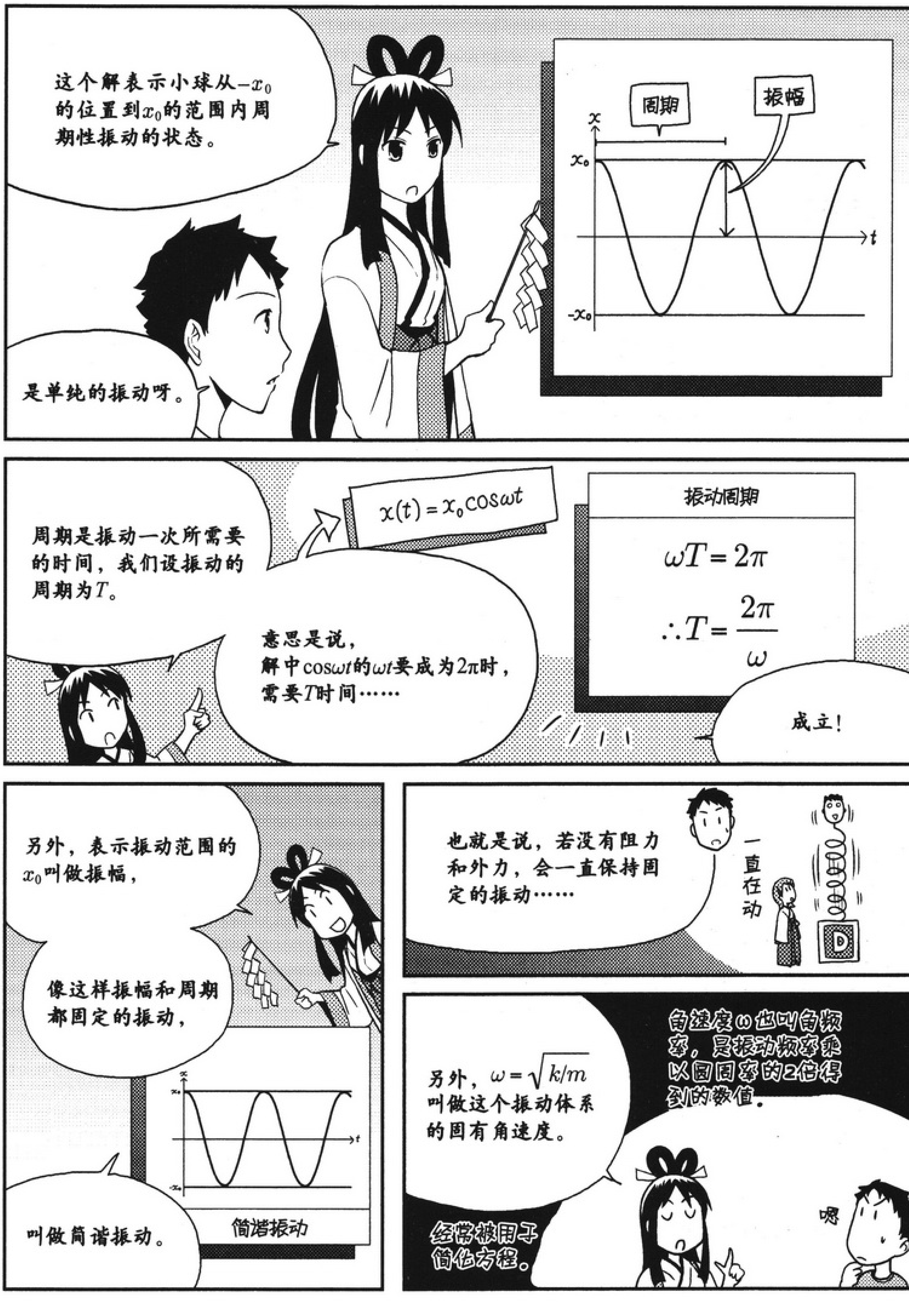
将通解（5.5）对t进行两次微分

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = -\omega^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$

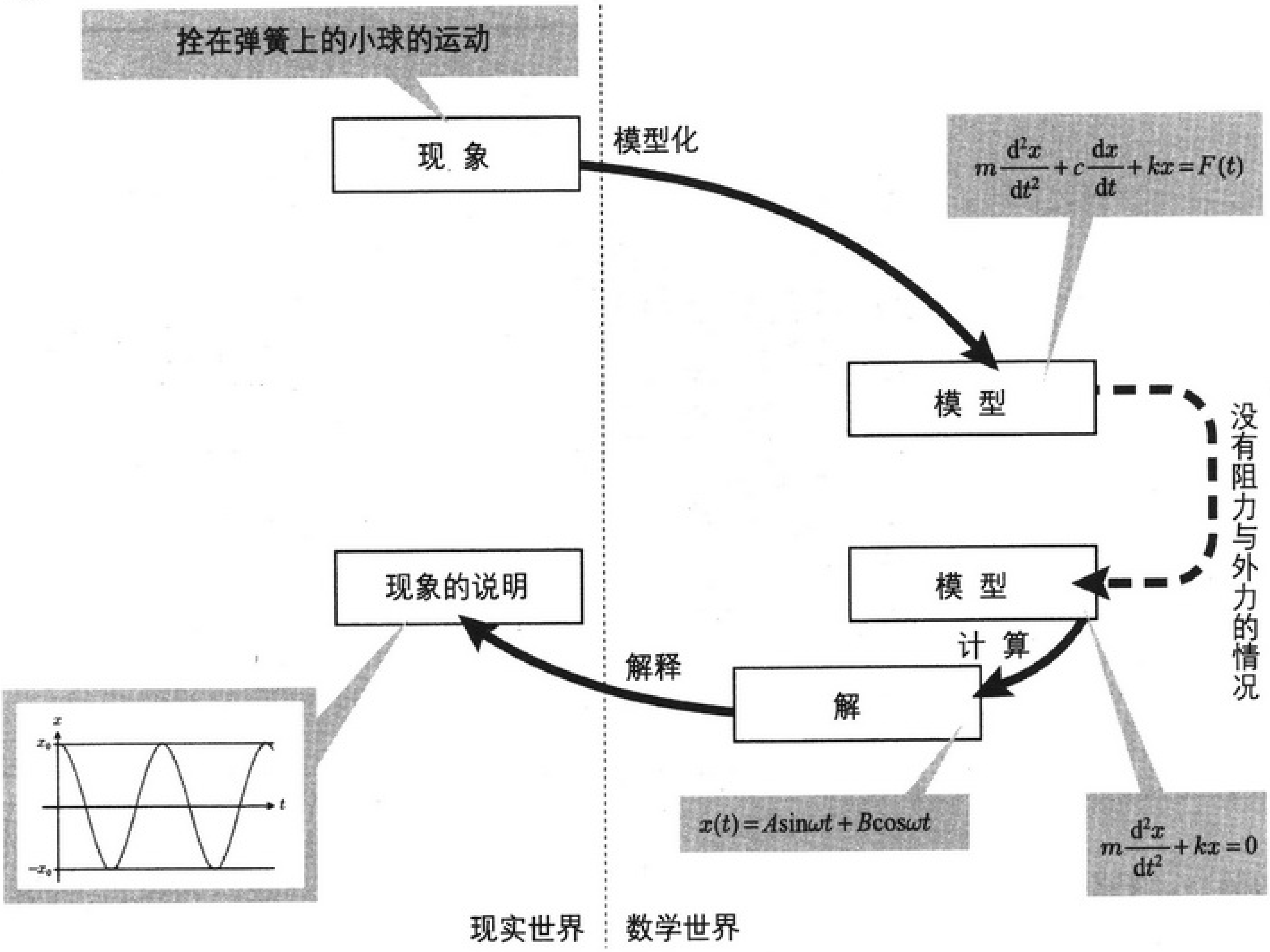
就可以确认是微分方程的解。

2 常数倍求和得到的。


嗯……
接着来吧！
加油呀！
既然求出了通解，
那么通过研究具体的状况
解释一下这个解吧。
没有阻力与外力情况下的通解
$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$
比如说，
拉住小球把弹簧伸长至x_0的
位置。
0
x_0
t=0时开始放手。
0
x_0
这种情况下，
初始条件变成$x(0)=x_0$，
$[dx/dt]_{t=0}=0$
$x(0) = A\sin(\omega\cdot 0) + B\cos(\omega\cdot 0) = B$
$\left[\frac{d}{dt}(A\sin\omega t + B\cos\omega t)\right]_{t=0} = \omega A\cos(\omega\cdot 0) - \omega B\cos(\omega\cdot 0) = \omega A$
根据上式，
$A = 0,\ B = x_0$
成立。
那么解……
$x(t) = x_0\cos\omega t$
就是这样！


这个解表示小球从$-x_0$的位置到x_0的范围内周期性振动的状态。
周期
振幅
x
x_0
$-x_0$
t
是单纯的振动呀。
周期是振动一次所需要的时间，我们设振动的周期为T。
$x(t)=x_0\cos\omega t$
振动周期
$\omega T=2\pi$
$\therefore T=\dfrac{2\pi}{\omega}$
意思是说，解中$\cos\omega t$的ωt要成为2π时，需要T时间……
成立！
另外，表示振动范围的x_0叫做振幅，
像这样振幅和周期都固定的振动，
叫做简谐振动。
简谐振动
也就是说，若没有阻力和外力，会一直保持固定的振动……
一直在动
D
另外，$\omega=\sqrt{k/m}$叫做这个振动体系的固有角速度。
角速度ω也叫角频率，是振动频率乘以圆周率的2倍得到的数值。
经常被用于简化方程。
嗯

现在的情况如下所示。



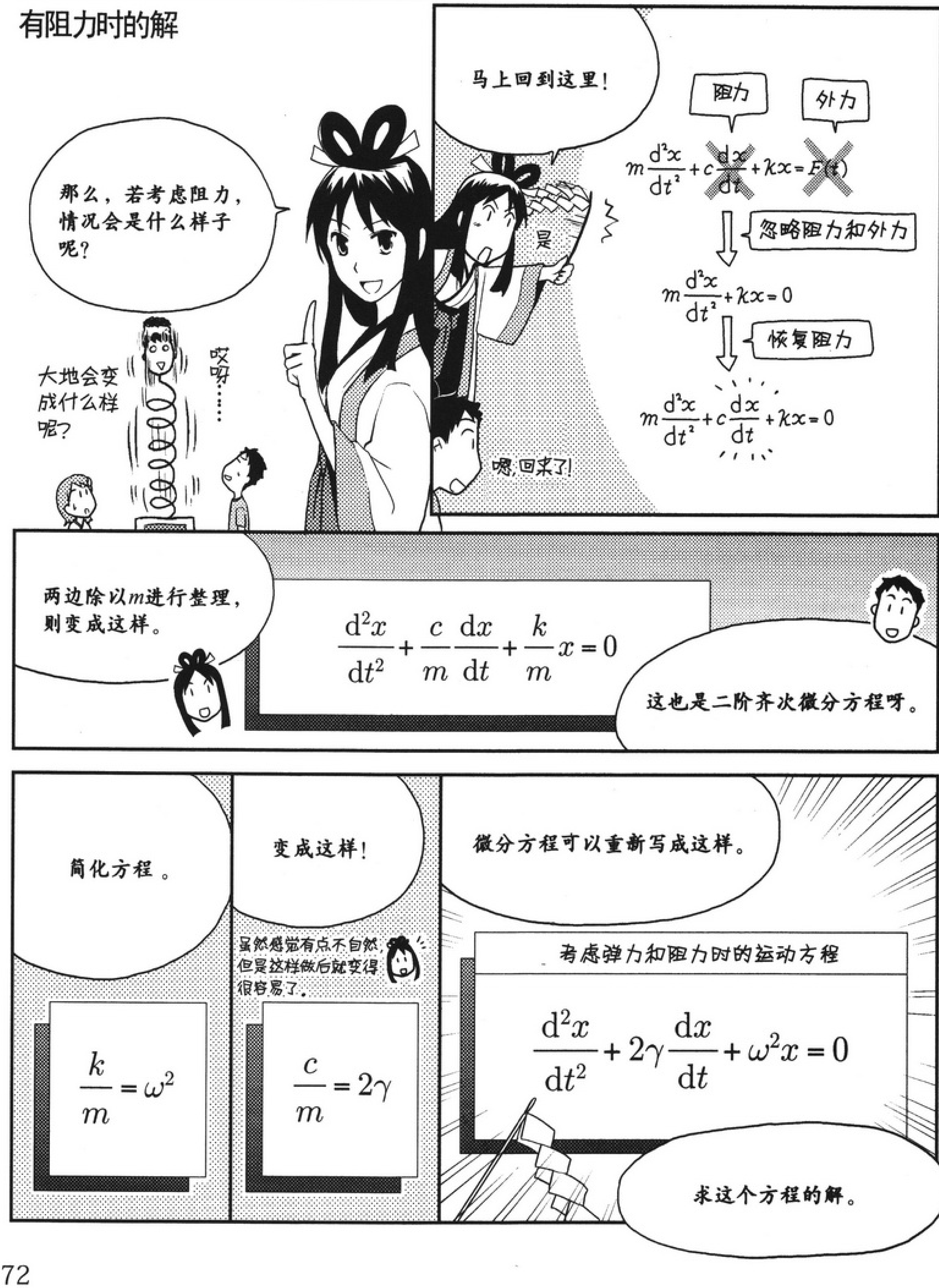
通过降阶能够得到简化之后的模型的解。现实中，阻力必然存在，所以说的是阻力非常小的情况。

◆ **没有阻力与外力的情况下，拴在弹簧上的小球的运动**

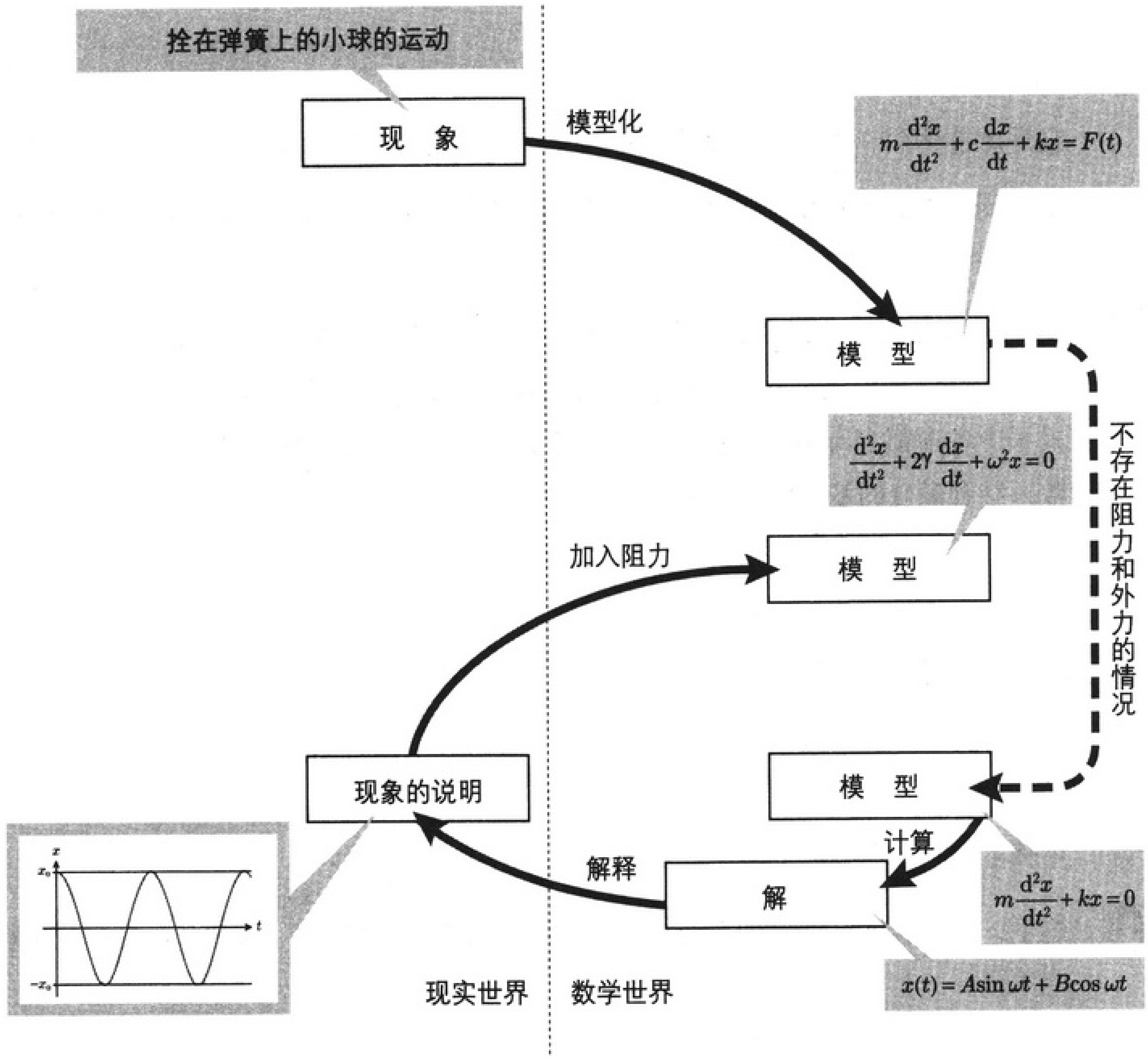
简谐振动能够解释这里所提及的忽略阻力情况下弹簧振动和振幅小的振子运动。另外，了解这些概念是非常重要的，因为它们是研究振动现象的基本知识。

4. 振动模型3　有阻力的情况

有阻力时的解



这就是到现在为止的流程。接下来我们把降阶简化之后的二次循环模型上再加上别的因素，使其变得稍微复杂一点。



◆ 有阻力时，拴在弹簧上的小球运动的模型化

那么，求不存在外力时的通解。这时也要注意观察这个微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$$

好的！

那么，我们能够注意到，x对t进行两次微分得到的项、进行一次微分得到的项与x本身相加为0[3]。也就是说，这里的函数$x(t)$必须是微分后形式不发生改变的函数。

3 由于在简谐运动的时候锻炼了眼睛，应该比以前更早看到了吧！

微分之后形式不发生改变的函数，似乎在什么地方见过。

这也是在53页出现过的式子，观察指数函数的微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t$$

之后就能明白，指数函数就是进行微分之后形式不发生改变的函数。巧妙地利用指数函数的这个性质，能否求得这个微分方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$ 的解呢？我们试试看吧。

指数函数的微分公式中，e^t对t进行微分之后跟以前一样，也不会出现系数什么的。微分多少次都是相同的形式。再看看这个微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$，式子中各项都含有系数，就这样求解肯定不可以，因此需要动动脑筋，设 λ 为常数，结合微分的基本性质(53页)[4]得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda t}=\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}$$

通过反复微分可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{\lambda t}=\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda t}$$

出现了系数，可以用于微分方程。

这里，我们尝试这样一种方法，把想要求解的微分方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$的解假设为

$$x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\quad \longleftarrow\text{假设的解} \tag{5.6}$$

如果常数 λ 满足$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$ 方程的话，确定常数 λ。
把假设的解（5.6）代入微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{e}^{\lambda t}+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda t}+\omega^2\mathrm{e}^{\lambda t}=0 \tag{5.7}$$

再进行微分计算

$$\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}+2\gamma\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}+\omega^2\mathrm{e}^{\lambda t}=0$$

合并同类项$\mathrm{e}^{\lambda t}$

$$(\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega^2)\mathrm{e}^{\lambda t}=0$$

4 这叫复合函数的微分。

由于$e^{\lambda t}$不可能为0[5]，为满足式（5.7），则必须有

$$\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega^2=0 \tag{5.8}$$

这是关于λ的二次方程啊。

那么，这个微分方程的解[6]为

$$\lambda_1=-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2},\ \lambda_2=-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\ {}^{7} \tag{5.9}$$

这就是说，与代数方程（5.8）的两个解（5.9）相对应，可以很巧妙地求得172页

的微分方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$的两个解

$$x_1=\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ x_2=\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\qquad \leftarrow \text{微分方程的解} \tag{5.10}$$

但是，这些解都不含任意常数，很遗憾都不是通解。但是这时我们知道应该怎样才能解决问题。

常数变易法呀。

是的。那么为求得通解，将解（5.10）乘以t的函数$c_1(t)$

$$x(t)=c_1(t)e^{\lambda_1 t}\qquad \leftarrow \text{假设系数的解} \tag{5.11}$$

那么，使用常数变易法，假设系数的解（5.11）对t进行微分

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_1(t)\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_1(t)\lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}^2c_1(t)}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{\mathrm{d}t}+\lambda_1\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_1(t)\lambda_1\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}^2c_1(t)}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+2\lambda_1\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_1(t)\lambda_1{}^2\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\end{aligned}$$

把上式代入微分方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$中

5 曲线与x轴不相交。

6 二次方程$ax^2+bx+c=0$的求解公式为$x=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$。

7 注意到了吧？这就是恍然大悟之处。γ前面加上系数2，使二次方程的解更简单。

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2c_1(t)}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+2\lambda_1\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_1(t)\lambda_1{}^2\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\right)$$

$$+2\gamma\left(\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_1(t)\lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\right)+\omega^2c_1(t)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=0$$

再合并相同项$\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2c_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+2(\lambda_1+\gamma)\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}+\left(\lambda_1{}^2+2\gamma\lambda_1+\omega^2\right)c_1(t)\right\}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=0 \tag{5.12}$$

不要被外观的复杂所困惑，这里的'$e^{\lambda t}$'同样也不可能为0，为满足式（5.12）则

$$\frac{\mathrm{d}^2c_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+2(\lambda_1+\gamma)\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}+\left(\lambda_1{}^2+2\gamma\lambda_1+\omega^2\right)c_1(t)=0$$

另外，根据（5.8），有$\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega^2=0$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2c_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+2(\lambda_1+\gamma)\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

两边同时乘以$\mathrm{e}^{2(\lambda_1+\gamma)t}$，整理[8]

$$\mathrm{e}^{2(\lambda_1+\gamma)t}\frac{\mathrm{d}^2c_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+2(\lambda_1+\gamma)\mathrm{e}^{2(\lambda_1+\gamma)t}\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\therefore\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{2(\lambda_1+\gamma)t}\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)=0$$

这样，看起来就比较舒服了。另外，根据代数方程的解（5.9）

$$\lambda_1=-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2},\ \lambda_2=-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$$

求λ_1和λ_2的和

$$\lambda_1+\lambda_2=\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)+\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)=-2\gamma$$

利用这个关系，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)=0$$成立。

设C为任意常数，然后将上式对t进行积分，

---

8 这种方法有点技巧性，但较常用。

由于 $$e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\ \frac{dc_1(t)}{dt}=C$$

设积分常数为α，想要求的函数$c_1(t)$变成

$$c_1(t)=C\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}dt+\alpha \tag{5.13}$$

那么，这个积分必须分为$\lambda_1=\lambda_2$和$\lambda_1\neq\lambda_2$两种情况考虑，随后分别进行讨论。

首先，考虑一下$\lambda_1=\lambda_2$的情况。这种情况下，由于$e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}=1$，函数（5.13）变成

$$c_1(t)=C\int dt+\alpha$$

积分运算，则

$$c_1(t)=Ct+\alpha$$

把现在求得的函数c_1（t）代入假设未知系数的解（5.11）中，就能够得到微分方程$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0$ 的通解

$$x(t)=(Ct+\alpha)e^{\lambda_1 t}$$

根据代数方程的解（5.9）

$$\lambda_1=-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2},\ \lambda_2=-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$$

$\lambda_1=\lambda_2$，也就是说

$$-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}=-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$$
$$\sqrt{\gamma^2-\omega^2}=0$$
$$\therefore \omega^2=\gamma^2$$

这时由于

$$\lambda_1=\lambda_2=-\gamma$$

把常数C换写成β，结果所求得的通解为

$$x(t)=(\alpha+\beta t)e^{-\gamma t} \qquad \leftarrow \omega^2=\gamma^2\text{情况下的通解}$$

这里，α和β均为任意的常数。

接下来，考虑$\lambda_1 \neq \lambda_2$的情况时，由于函数（5.13）为指数函数的积分，进行积分运算，则

$$c_1(t) = \frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \alpha$$

这里，代数方程的解（5.9）为

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \ \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

从$\lambda_1 \neq \lambda_2$的条件虽然可以得知$\omega^2 \neq \gamma^2$，根据根号中$\gamma^2 - \omega^2$的符号分

$$\omega^2 > \gamma^2, \ \omega^2 < \gamma^2$$

两种情况进行考虑。

首先，考虑一下$\omega^2 > \gamma^2$的情况。这种情况下，代数方程的解（5.9）

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \ \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

的根号中的值会变成负数，此时的解为复数。引入虚数单位i ,则可写成

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -\gamma + \mathrm{i}\Omega, \ \lambda_2 = -\gamma - \mathrm{i}\Omega \\ &\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{aligned} \tag{5.14}$$

设α和β为任意的常数，因此所求的通解为

$$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + \mathrm{i}\Omega t} + \beta e^{-\gamma t + \mathrm{i}\Omega t} \qquad \leftarrow \omega^2 > \gamma^2\text{情况下的通解}$$

那么，$\omega^2 < \gamma^2$的情况会是什么样呢。这种情况下，代数方程的解（5.9）为

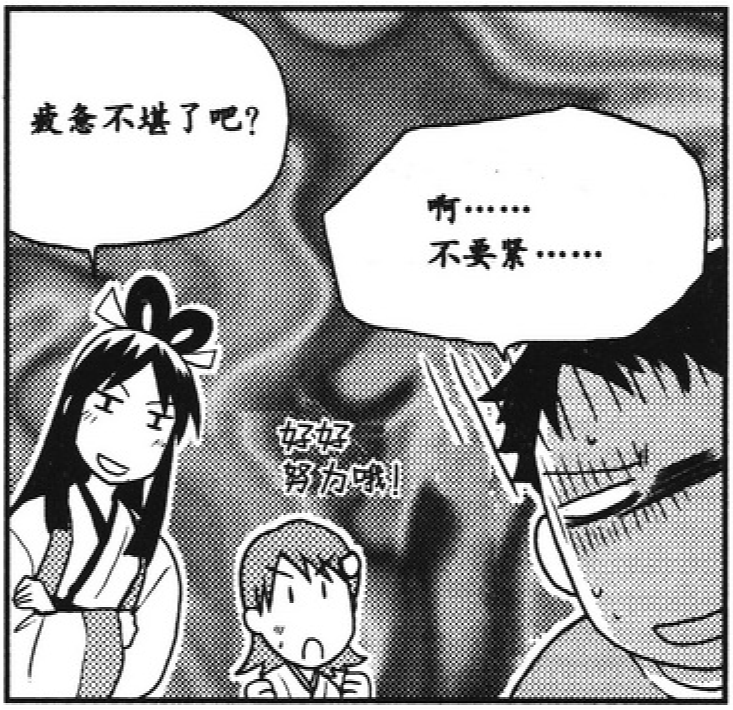
$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \ \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

变成实数，则写成

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -\gamma + \Gamma, \ \lambda_2 = -\gamma - \Gamma \\ &\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

设α和β为任意的常数，因此，所求的通解为

$$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + \Gamma t} + \beta e^{-\gamma t + \Gamma t} \qquad \leftarrow \omega^2 < \gamma^2\text{情况下的通解}$$

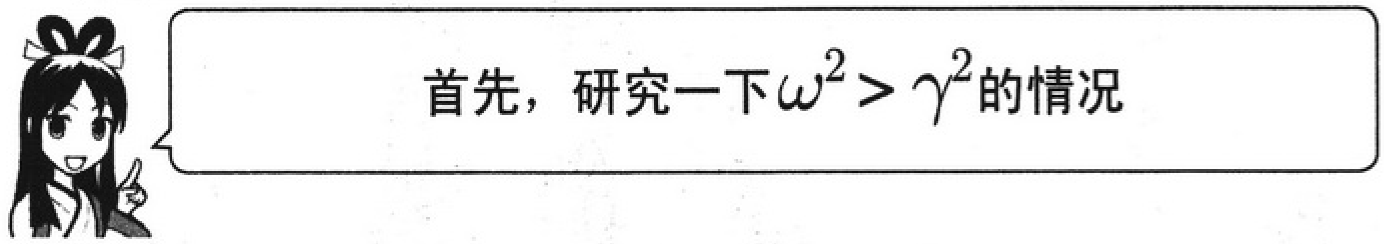


$$\omega^2 > \gamma^2 : x(t) = \alpha \mathrm{e}^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta \mathrm{e}^{-\gamma t - i\Omega t}，\ \Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

$$\omega^2 = \gamma^2 : x(t) = (\alpha + \beta t)\mathrm{e}^{-\gamma t}$$

$$\omega^2 < \gamma^2 : x(t) = \alpha \mathrm{e}^{-\gamma t + \Gamma t} + \beta \mathrm{e}^{-\gamma t - \Gamma t}，\ \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

■ 考虑阻力情况下的解1（阻尼振动）



设α和β为任意的常数，那么，这种情况下的通解为

$$x(t)=\alpha e^{-\gamma t+i\Omega t}+\beta e^{-\gamma t+i\Omega t},\ \Omega=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$$

将指数部分分为实数部分和虚数部分，则

$$x(t)=e^{-\gamma t}(\alpha e^{i\Omega t}+\beta e^{-i\Omega t}) \tag{5.15}$$

那么，通解（5.15）的括号中的$\alpha e^{i\Omega t}+\beta e^{-i\Omega t}$，利用欧拉公式[9]

$$e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x$$

则

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{-\gamma t}\{\alpha(\cos\Omega t+i\sin\Omega t)+\beta(\cos\Omega t-i\sin\Omega t)\}\\&=e^{-\gamma t}\{(\alpha+\beta)\cos\Omega t+i(\alpha-\beta)\sin\Omega t\}\\&=e^{-\gamma t}(a\cos\Omega t+b\sin\Omega t)\end{aligned} \tag{5.16}$$

假设$a=\alpha+\beta$，$b=i(\alpha-\beta)$。

虽然此解与周期为$2\pi/\omega$的简谐振动的通解（5.5）非常相似，但是有两个不同点，一是周期为$2\pi/\Omega$和，二是整体有$e^{-\gamma t}$这个指数函数相乘。这个解所要表现的是什么样的运动呢？

与简谐运动时一样，拉住小球把弹簧拉伸至x_0，$t=0$时开始放手。假设初始条件为$t=0$时，$x(0)=x_0$，$[dx/dt]_{t=0}=0$，根据式（5.16）则

$$x(0)=e^{-\gamma 0}\{a\cos(\Omega\cdot 0)+b\sin(\Omega\cdot 0)\}=a=x_0 \tag{5.17}$$

9 实际上，这是将指数函数扩大到复数情况下的定义，因此反过来说也是成立。

$a=x_0$，将式子（5.16）对t进行微分，由于$a=x_0$，则

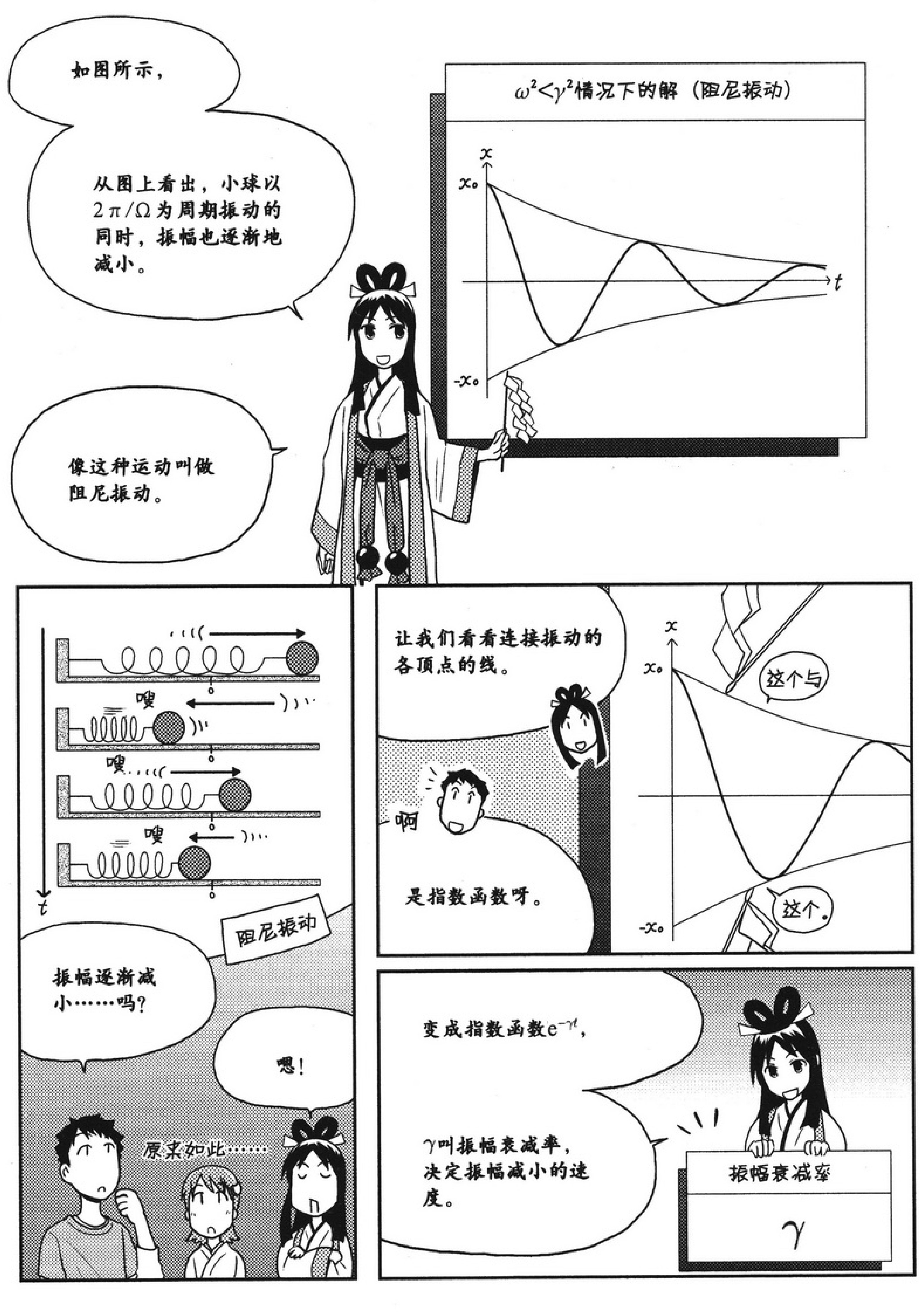
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=-\gamma \mathrm{e}^{-\gamma t}(a\cos \Omega t+b\sin \Omega t)+\mathrm{e}^{-\gamma t}(-a\Omega\sin \Omega t+b\Omega\cos \Omega t)\\&=\mathrm{e}^{-\gamma t}\{(-\gamma a+b\Omega)\cos \Omega t-(\gamma a+a\Omega)\sin \Omega t\}\end{aligned}$$

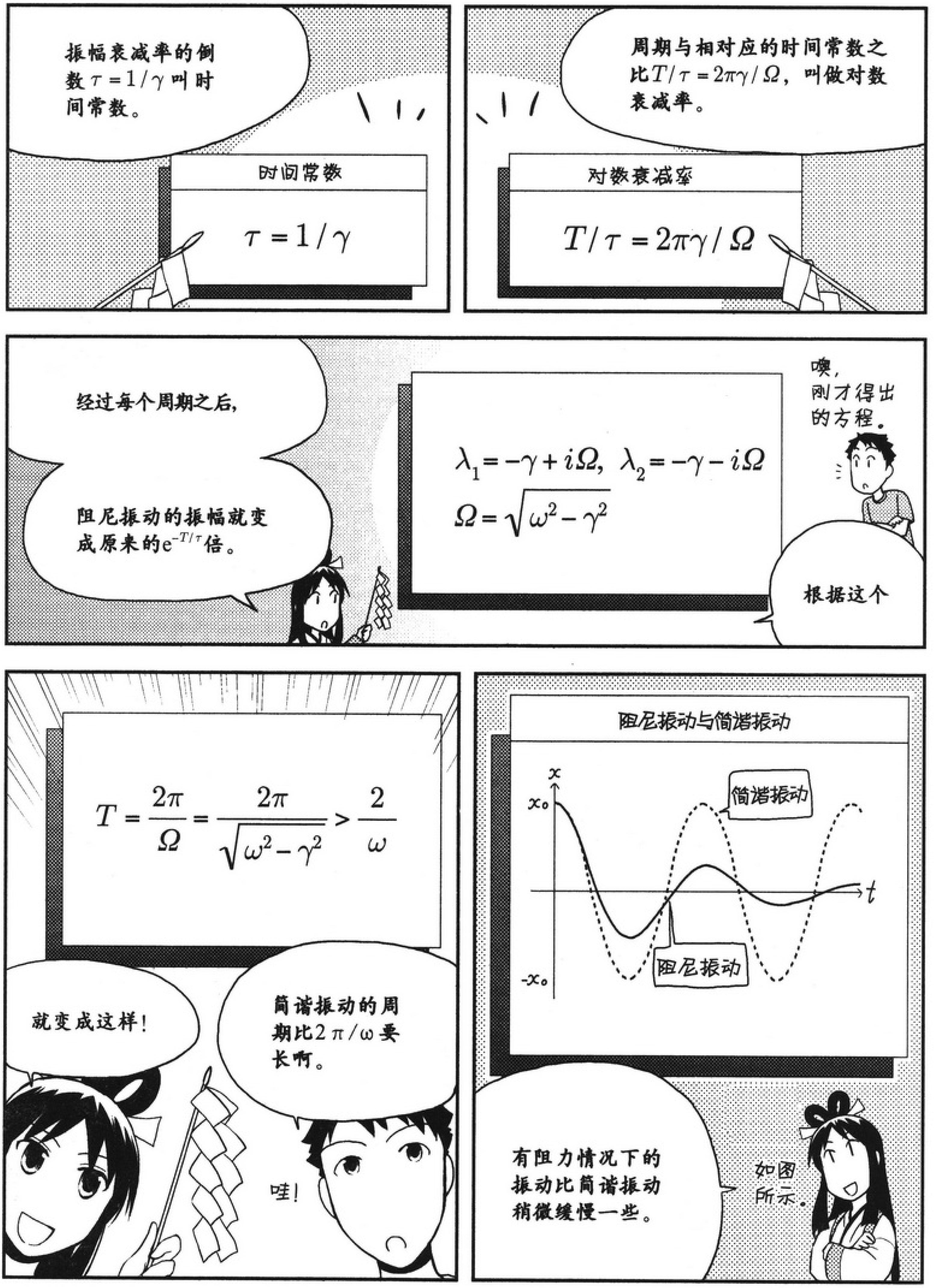
根据上式得到

$$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0}&=\mathrm{e}^{-\gamma\cdot 0}\{(-\gamma a+b\Omega)\cos(\Omega\cdot 0)-(\gamma a+a\Omega)\sin(\Omega\cdot 0)\}\\&=-\gamma a+b\Omega=0 \qquad (5.18)\\&\therefore b=\frac{\gamma}{\Omega}x_0\end{aligned}$$

最后，根据式（5.17）和（5.18）得到解

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}x_0\left(\cos \Omega t+\frac{\gamma}{\Omega}\sin \Omega t\right).$$

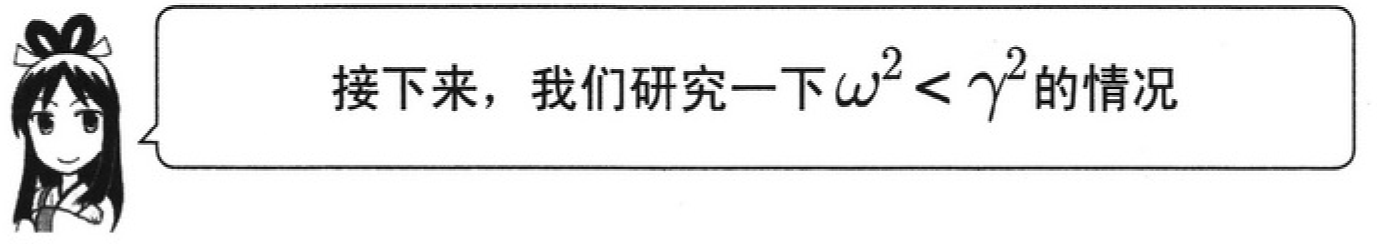

如图所示，
从图上看出，小球以$2\pi/\Omega$为周期振动的同时，振幅也逐渐地减小。
$\omega^2<\gamma^2$情况下的解（阻尼振动）
x
x_0
t
$-x_0$
像这种运动叫做阻尼振动。
嗖
嗖
嗖
t
阻尼振动
振幅逐渐减小……吗?
嗯!
原来如此……
让我们看看连接振动的各顶点的线。
啊
x
x_0
这个与
这个。
$-x_0$
是指数函数呀。
变成指数函数$e^{-\gamma t}$，
γ叫振幅衰减率，决定振幅减小的速度。
振幅衰减率
γ



振幅衰减率的倒数$\tau=1/\gamma$叫时间常数。
时间常数
$\tau=1/\gamma$
周期与相对应的时间常数之比$T/\tau=2\pi\gamma/\Omega$，叫做对数衰减率。
对数衰减率
$T/\tau=2\pi\gamma/\Omega$
经过每个周期之后，
阻尼振动的振幅就变成原来的$e^{-T/\tau}$倍。
$\lambda_1=-\gamma+i\Omega,\ \lambda_2=-\gamma-i\Omega$
$\Omega=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$
噢，刚才得出的方程。
根据这个
$T=\dfrac{2\pi}{\Omega}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}>\dfrac{2}{\omega}$
就变成这样！
简谐振动的周期比$2\pi/\omega$要长啊。
哇！
阻尼振动与简谐振动
x
x_0
$-x_0$
t
简谐振动
阻尼振动
有阻力情况下的振动比简谐振动稍微缓慢一些。
如图所示。

那我们研究一下
阻尼振动的实例。
自行车弹簧装置中的弹簧
总是在振动着，
乘坐的感觉不舒服。
摇晃
弹簧
不合格品啊！
这是简谐振动。
那么，在自行车上
安装一个叫做减震
器的调整阻力的装
置，就能达到快速
减震的目的。
原来如此
减震器
舒服多了
……
是阻尼
运动
超市或者便利店里的动
门上也在使用减震器。
诶？
鲜
如果没有减震器，总
是吧嗒吧嗒的响，很
危险的呀。
吧嗒
吧嗒
吧嗒
好恐怖啊……
嗯
没人了，门还
一直不停地摆
动着……

■ 有阻力情况下的解2（过度衰减）



设α和β为任意的常数，这种情况下的通解为

$$x(t)=\alpha e^{-\gamma t+\Gamma t}+\beta e^{-\gamma t-\Gamma t},\ \Gamma=\sqrt{\gamma^2-\omega^2} \tag{5.19}$$

那么像往常一样把指数部分分为两个部分，则

$$x(t)=e^{-\gamma t}(\alpha e^{\Gamma t}+\beta e^{-\Gamma t}) \tag{5.20}$$

从这个式子并不能判断出哪一项与振动有关系[10]。那么，此解所描述的是什么样的运动呢？

拉住小球把弹簧拉伸至x_0，$t=0$时开始放手。初始条件为$t=0$时，$x(0)=x_0$，$[dx/dt]_{t=0}=0$，根据通解（5.20），则

$$x(0)=e^{-\gamma 0}(\alpha e^{\Gamma 0}+\beta e^{-\Gamma 0})=\alpha+\beta=x_0 \tag{5.21}$$

另外，通解（5.20）对t进行微分

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\gamma e^{-\gamma t}(\alpha e^{\Gamma t}+\beta e^{-\Gamma t})+e^{-\gamma t}(\alpha\Gamma e^{\Gamma t}-\beta\Gamma e^{-\Gamma t})\\&=e^{-\gamma t}\{(\Gamma-\gamma)\alpha e^{\gamma t}-(\Gamma+\gamma)\beta e^{-\gamma t}\}\end{aligned}$$

根据上式，则化为

$$\begin{aligned}\left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=0}&=e^{-\gamma 0}\{(\Gamma-\gamma)\alpha e^{\Gamma 0}-(\Gamma+\gamma)\beta e^{-\Gamma 0}\}=0\\&\therefore(\Gamma-\gamma)\alpha-(\Gamma+\gamma)\beta=0\end{aligned} \tag{5.22}$$

最后，根据式（5.21）和（5.22），则

10 指数部分为实数的指数函数，不管是增加的还是减少的，都是单调函数。为了表达振动的函数，指数部分必须要引入虚数。

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x_0\\(\Gamma-\gamma)\alpha-(\Gamma+\gamma)\beta=0\end{cases}$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{x_0}{2}\left(1+\frac{\gamma}{\Gamma}\right),\ \beta=\frac{x_0}{2}\left(1-\frac{\gamma}{\Gamma}\right)$$

因此，解为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}\left\{\frac{x_0}{2}\left(1+\frac{\gamma}{\Gamma}\right)\mathrm{e}^{\Gamma t}+\frac{x_0}{2}\left(1-\frac{\gamma}{\Gamma}\right)\mathrm{e}^{-\Gamma t}\right\}$$

虽然这样也可以，但是用双曲线函数[11]

$$\cosh x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},\ \sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

的话，可以得到与欧拉公式相似的关系

$$\mathrm{e}^{\pm x}=\cosh x\pm\sinh x$$

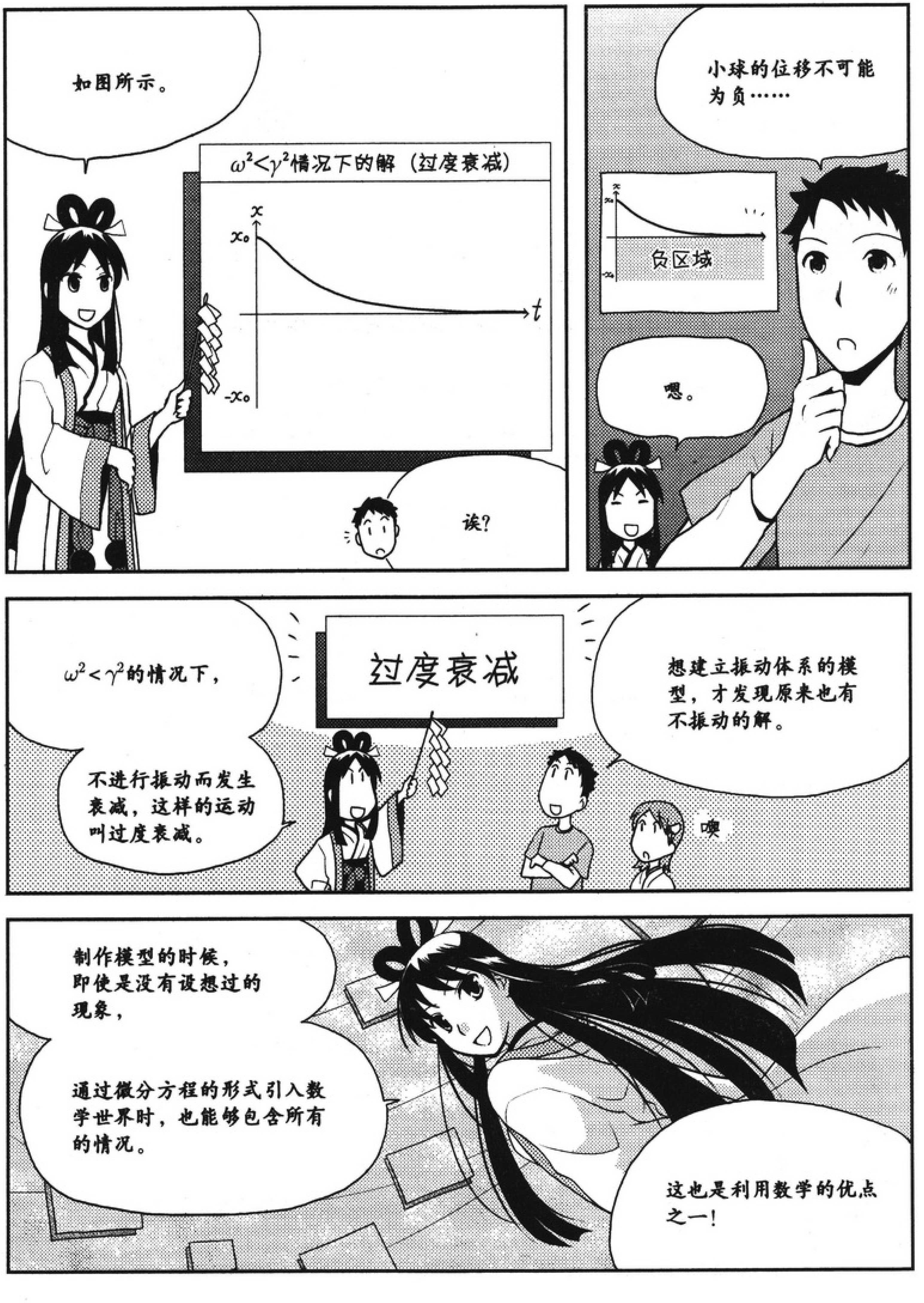
利用上式，则通解（5.20）为

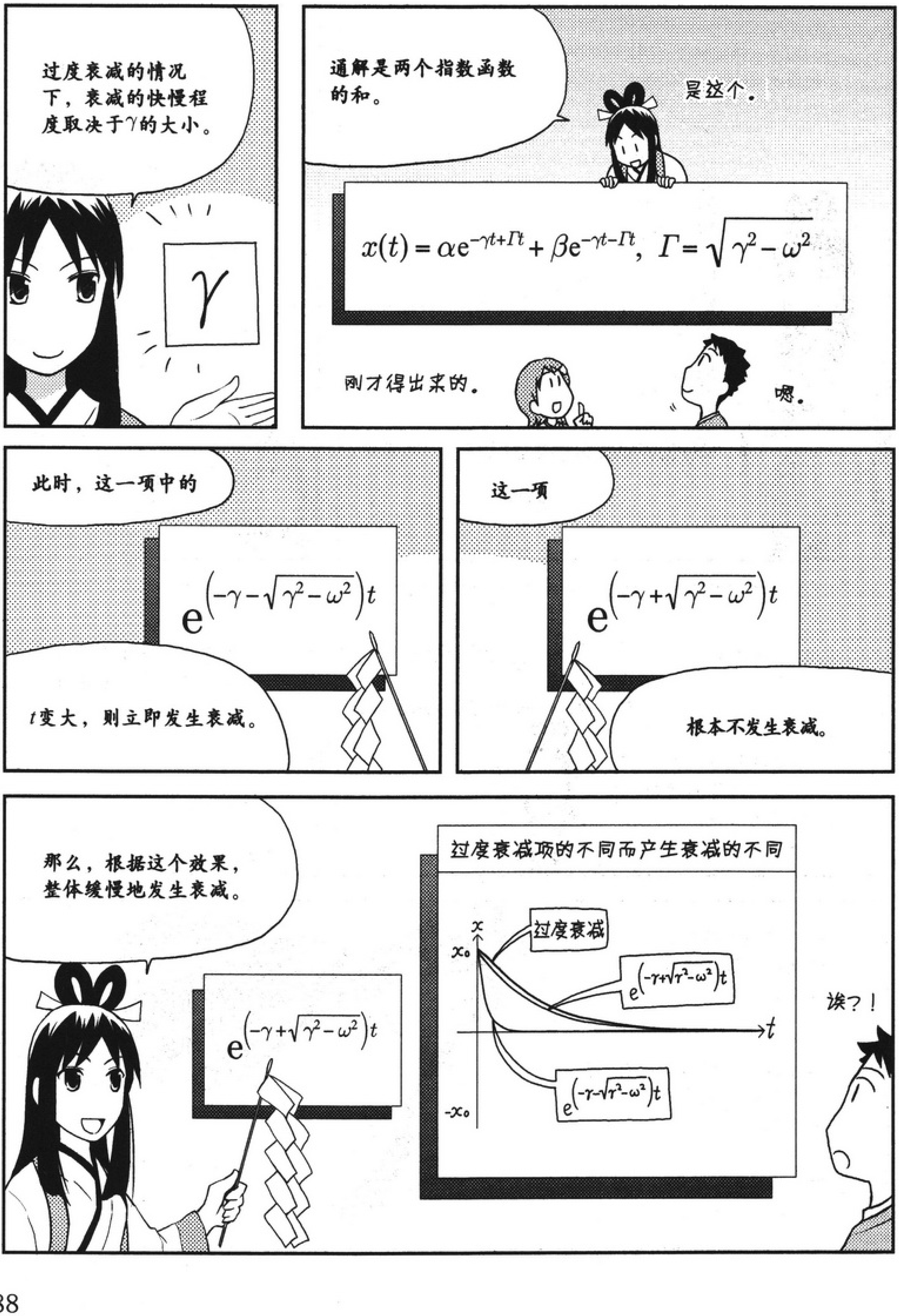
$$x(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}\left\{\frac{x_0}{2}\left(1+\frac{\gamma}{\Gamma}\right)(\cosh\Gamma t+\sinh\Gamma t)+\frac{x_0}{2}\left(1-\frac{\gamma}{\Gamma}\right)(\cosh\Gamma t-\sinh\gamma t)\right\}$$

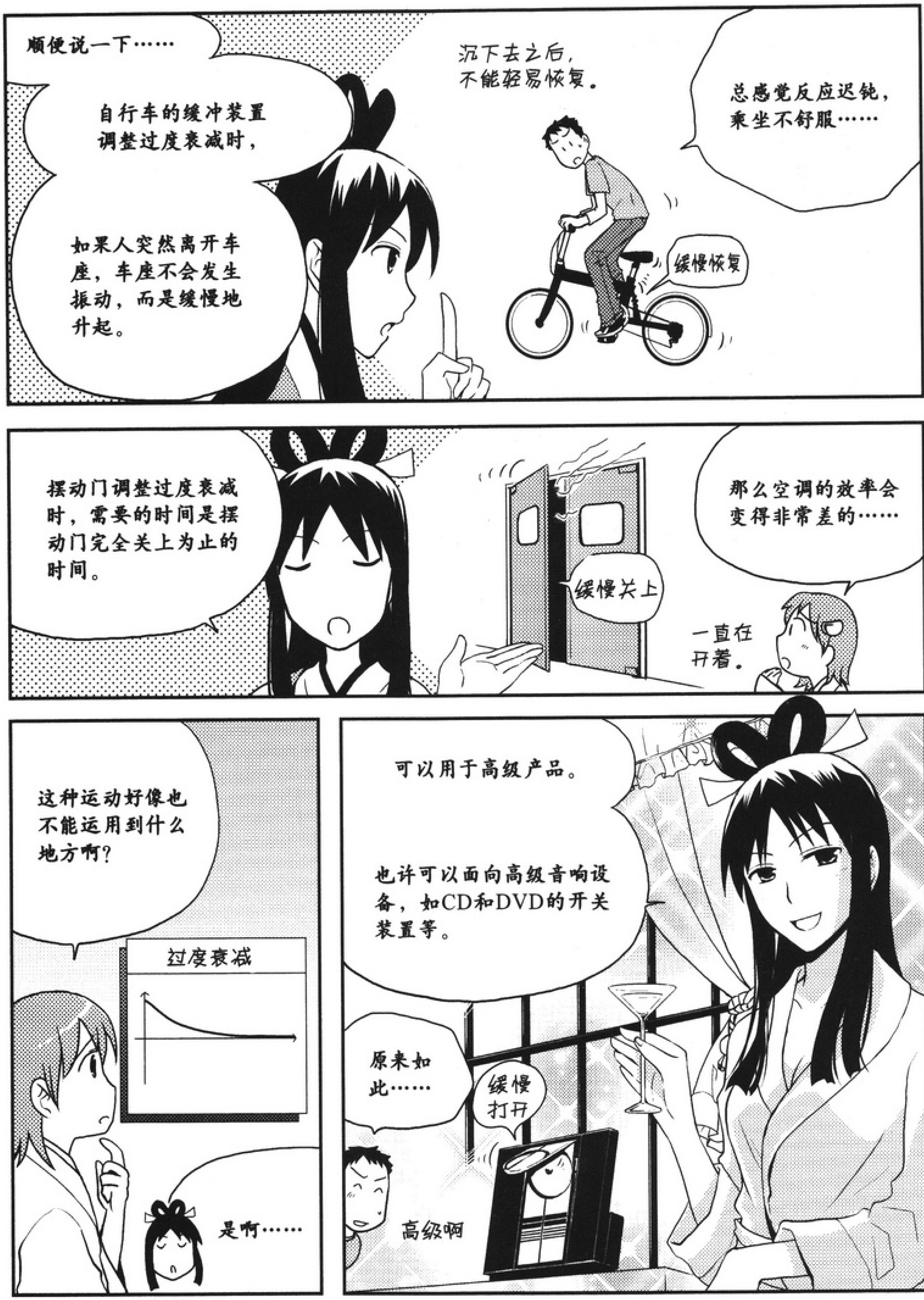
$$=\mathrm{e}^{-\gamma t}x_0\left(\cosh\Gamma t+\frac{\gamma}{\Gamma}\sinh\Gamma t\right)$$

这样就变得稍微简单些了。

11 读作正弦双曲线和余弦双曲线。


如图所示。
$\omega^2<\gamma^2$情况下的解（过度衰减）
x
x_0
t
$-x_0$
诶？
小球的位移不可能为负……
负区域
嗯。
$\omega^2<\gamma^2$的情况下，
过度衰减
不进行振动而发生衰减，这样的运动叫过度衰减。
想建立振动体系的模型，才发现原来也有不振动的解。
噢
制作模型的时候，即使是没有设想过的现象，
通过微分方程的形式引入数学世界时，也能够包含所有的情况。
这也是利用数学的优点之一！


过度衰减的情况下，衰减的快慢程度取决于γ的大小。
γ
通解是两个指数函数的和。
是这个。
$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + \Gamma t} + \beta e^{-\gamma t - \Gamma t}, \ \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$
刚才得出来的。
嗯。
此时，这一项中的
$e^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right)t}$
t变大，则立即发生衰减。
这一项
$e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right)t}$
根本不发生衰减。
那么，根据这个效果，整体缓慢地发生衰减。
$e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right)t}$
过度衰减项的不同而产生衰减的不同
x
x_0
过度衰减
$e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right)t}$
t
$e^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right)t}$
$-x_0$
诶？！


顺便说一下……
自行车的缓冲装置调整过度衰减时，
如果人突然离开车座，车座不会发生振动，而是缓慢地升起。
沉下去之后，不能轻易恢复。
缓慢恢复
总感觉反应迟钝，乘坐不舒服……
摆动门调整过度衰减时，需要的时间是摆动门完全关上为止的时间。
缓慢关上
那么空调的效率会变得非常差的……
一直在开着。
这种运动好像也不能运用到什么地方啊？
过度衰减
是啊……
可以用于高级产品。
也许可以面向高级音响设备，如CD和DVD的开关装置等。
原来如此……
缓慢打开
高级啊

■ 有阻力情况下的解3（临界衰减）

这次，考虑$\omega^2=\gamma^2$的情况

设α和β为任意的常数，这种情况下的通解为

$$x(t)=(\alpha+\beta t)\mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{5.23}$$

在这种情况下，也不能判断出与振动有关系的项。

与之前的情况一样，拉住小球把弹簧拉伸至x_0，t=0时开始放手。初始条件为t=0时，$x(0)=x_0$，$[\mathrm{d}x/\mathrm{d}t]_{t=0}=0$，根据通解（5.23），则

$$x(0)=(\alpha+\beta\cdot 0)\mathrm{e}^{-\gamma\cdot 0}=\alpha=x_0 \tag{5.24}$$

由于上式，$\alpha=x_0$，通解（5.23）对t进行微分

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=\beta\mathrm{e}^{-\gamma t}+(\alpha+\beta t)(-\gamma)\mathrm{e}^{-\gamma t}\\&=\{\beta-\gamma(\alpha+\beta t)\}\mathrm{e}^{-\gamma t}\end{aligned}$$

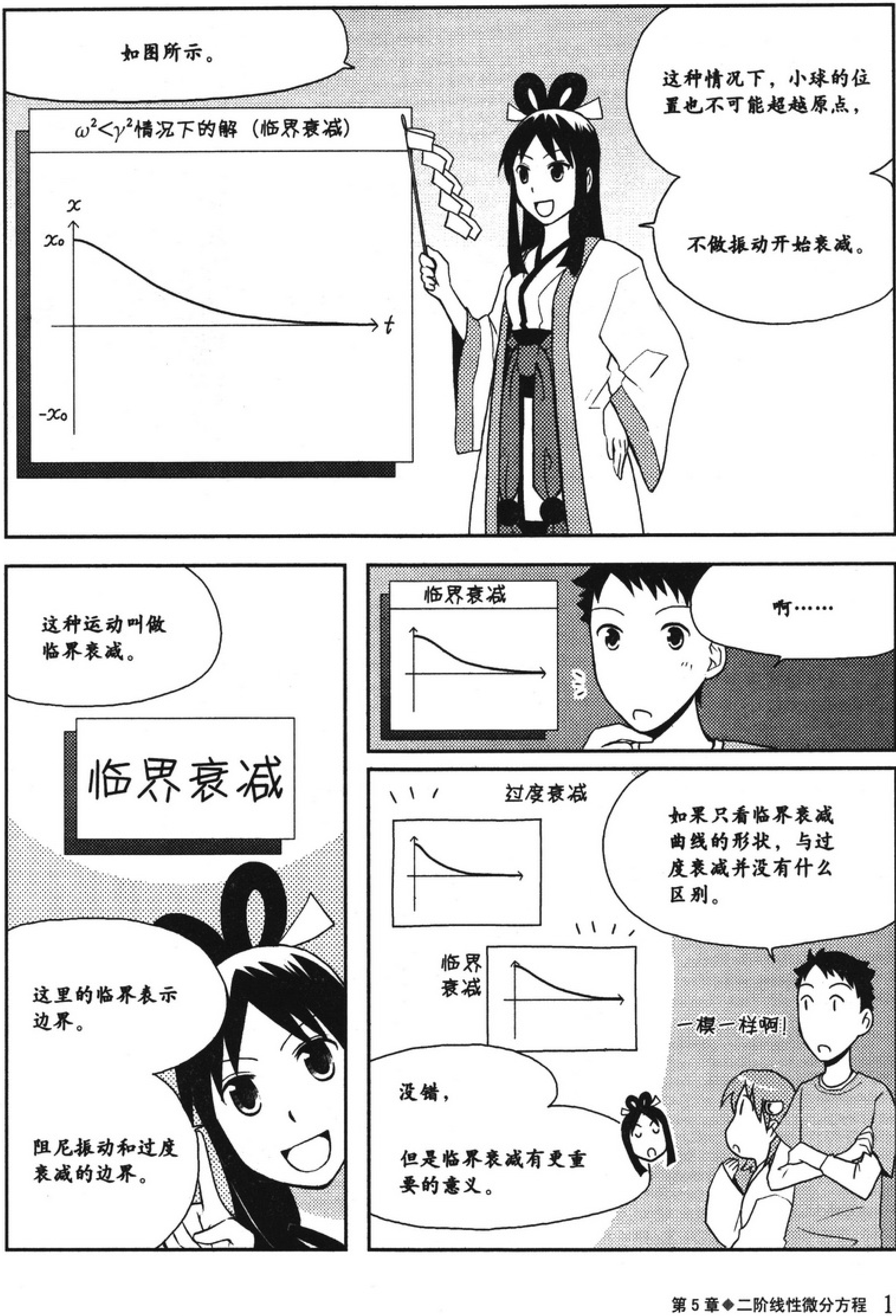
根据上式，化为

$$\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0}=\{\beta-\gamma(\alpha+\beta\cdot 0)\}\mathrm{e}^{-\gamma\cdot 0}=0$$

$$\therefore \beta=\gamma x_0 \tag{5.25}$$

那么根据(5.24)、(5.25)解为

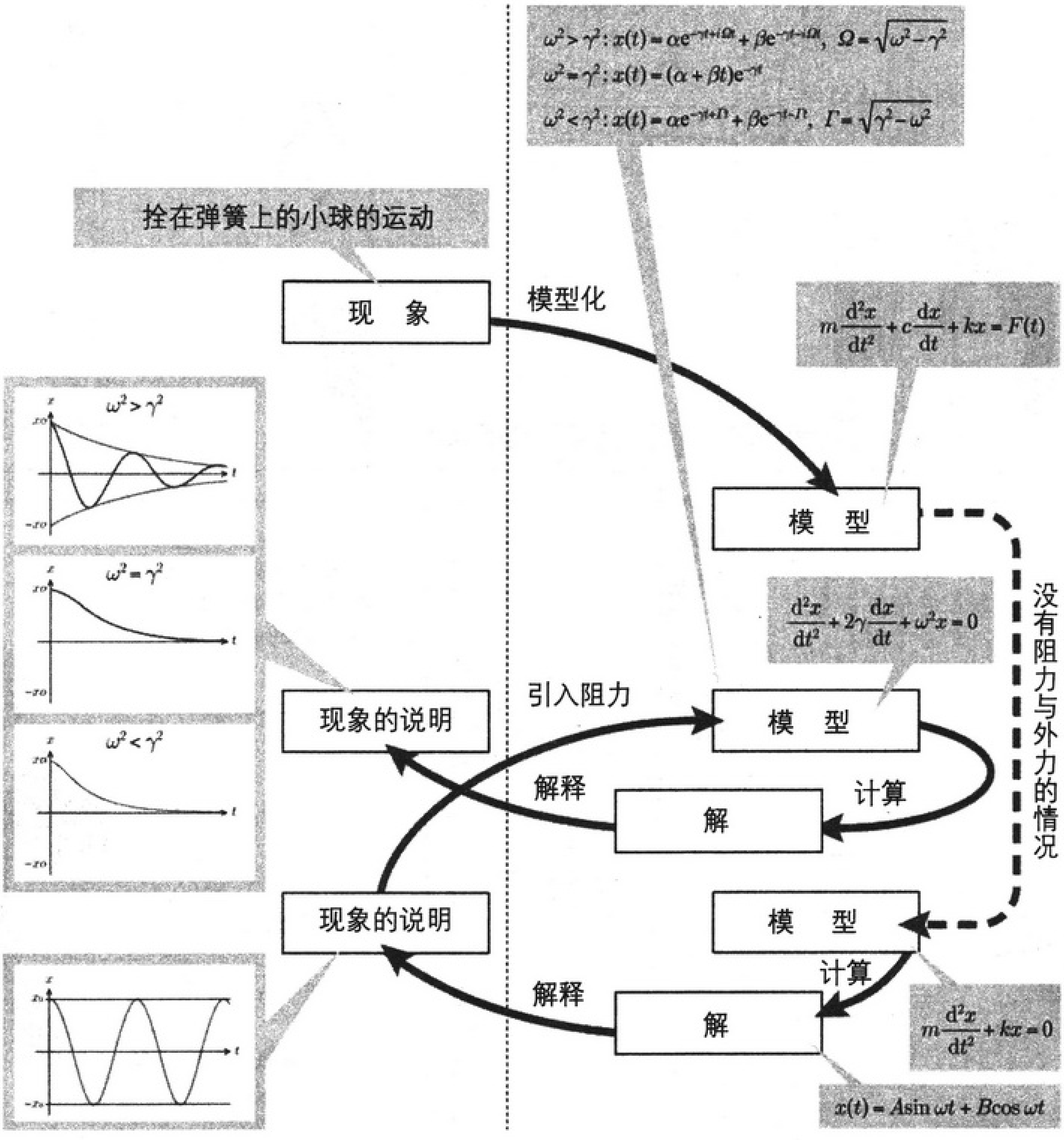
$$\begin{aligned}x(t)&=(x_0+\gamma x_0 t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\\&=x_0(1+\gamma t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\end{aligned} \tag{5.26}$$


如图所示。
$\omega^2<\gamma^2$情况下的解（临界衰减）
x
x_0
t
$-x_0$
这种情况下，小球的位置也不可能超越原点，
不做振动开始衰减。
这种运动叫做临界衰减。
临界衰减
临界衰减
啊……
这里的临界表示边界。
阻尼振动和过度衰减的边界。
过度衰减
如果只看临界衰减曲线的形状，与过度衰减并没有什么区别。
临界衰减
一模一样啊！
没错，
但是临界衰减有更重要的意义。

若阻力比临界衰减小，就变成阻尼振动，阻尼振动的情况下，
跨过原点的瞬间便是速度最快的瞬间。
x
x_0
$-x_0$
t
最快
过度衰减
临界衰减
阻尼振动
明白了吗？
……啊……
看来没明白
有一个叫自动闭门器的生活用品。
用它来调整弹簧和减震器使其接近临界衰减。
啊！
住宅的门上也经常使用这个东西。
我们家的玄关上也安装了这个东西。
如果将其调整为阻尼振动，
那么关闭的瞬间速度最快，也许门会坏掉。
阻尼振动
啪
如果没有门框，没准门会飞出去！
相反，
若是过度衰减，门会非常缓慢地关闭。
过度衰减
慢
慢
……让人好焦急呀！
快点关上！


若是临界衰减，用简谐振动周期一半的时间，
小球就能到达原点的位置。
但不会超越原点。
x
临界衰减
x_0
t
简谐振动
$-x_0$
门会很平稳地关上。
啪
原来如此，好顺畅呀！
将计量表调整为临界衰减，更易于测定。
没有进行调整
焦急
测量
啪啪
嗞嗞
啪啪
嗞嗞
看来，临界衰减也很重要啊。
快点停止
电流计
进行调整
嗞
好
嗞
如果把自行车的缓冲装置也调整成临界衰减，会发挥较好的效果。
乘坐很舒适！
很快恢复！

今天就到这里。对没有外力情况下的三种解进行了解释。



◆ 引入阻力的情况下，对拴在弹簧上小球运动的解释

是的。

5. 小结——特征方程

到现在为止，以拴在弹簧上小球的运动为例，学习了常系数二阶线性微分方程的解法，在这里进行一下总结。为求解这个常系数二阶奇次线性微分方程

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \quad \leftarrow \text{常系数二阶奇次微分方程} \tag{5.27}$$

设 λ 为常数，假设解为

$$y(x)=e^{\lambda x} \quad \leftarrow \text{假设的解} \tag{5.28}$$

把假设的解（5.28）代入微分方程(5.27)

$$a\frac{d^2}{dx^2}e^{\lambda x}+b\frac{d}{dx}e^{\lambda x}+ce^{\lambda x}=0$$

进行微分计算

$$a\lambda^2e^{\lambda x}+b\lambda e^{\lambda x}+ce^{\lambda x}=0$$

合并同类项

$$(a\lambda^2+b\lambda+c)e^{\lambda x}=0 \tag{5.29}$$

与前面的情况相同，指数函数$e^{\lambda x}$在x所有的范围内都不可能为0，若要（5.29）成立，必须满足

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0 \tag{5.30}$$

由于这是关于 λ 的二次方程，那么，解为

$$\lambda_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \lambda_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

也就是说，能够得到与代数方程（5.30）的两个解相对应的、微分方程(5.27)的两个解

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\ y_2=e^{\lambda_2 x} \quad \leftarrow \text{常系数二阶奇次微分方程的解}$$

像这样通过代数方程的解求得微分方程的解，那么这个代数方程（5.30）就叫做特征方程。如果已知特征方程的解，也就能够得到相应的微分方程的解。即如果能够求解二次方程，也必然能够求解相应的常系数二阶奇次微分方程。

根据根号中判别式b^2-4ac的符号$\sqrt{\ }$(根号)，把特征方程（5.30）的解分别为几种情况。分别是，$b^2>4ac$的情况下有两个实数解，$b^2=4ac$的情况下为重解，$b^2>4ac$的情况下有两个互为共轭的复数解，下面我们分别讨论一下不同的情况。

$b^2>4ac$的情况下，由于特征方程（5.30）有两个实数解

$$\lambda_1=\frac{-b+\gamma}{2a},\ \lambda_2=\frac{-b-\gamma}{2a},\ \gamma=\sqrt{b^2-4ac}$$

设α和β为任意的常数，那么微分方程（5.27）的通解为

$$y(x)=\alpha\mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x+\frac{\gamma}{2a}x}+\beta\mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x-\frac{\gamma}{2a}x}$$

$b^2=4ac$的情况下，特征方程（5.30）的解为重解

$$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{b}{2a}$$

设α和β为任意的常数，那么微分方程（5.27）的通解为

$$y(x)=(\alpha+\beta x)\mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}$$

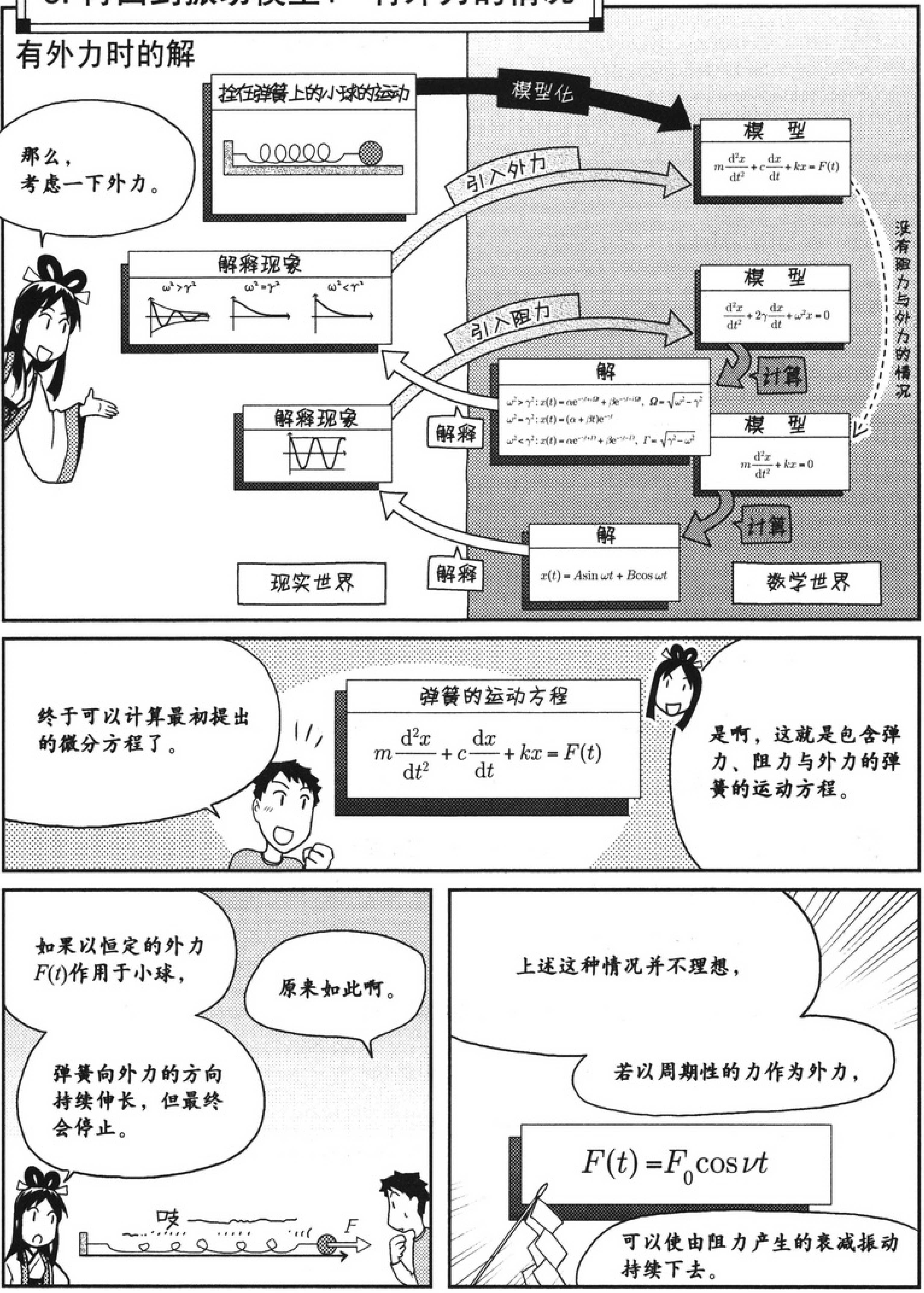
$b^2>4ac$的情况下，特征方程（5.30）有两个互为共轭的复数解

$$\lambda_1=\frac{-b+i\Gamma}{2a},\ \lambda_2=\frac{-b-i\Gamma}{2a},\ \Gamma=\sqrt{4ac-b^2}$$

设α和β为任意的常数，那么微分方程（5.27）的通解为

$$x(t)=\alpha\mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}t+i\frac{\Gamma}{2a}t}+\beta\mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}t-i\frac{\Gamma}{2a}t}.$$

6. 再回到振动模型1　有外力的情况



这是包含弹力、阻力和外力的弹簧的运动方程，两边除以m，进行整理

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0\cos\nu t}{m}$$

这也是二阶线性微分方程呀。

与（5.1）相同

$$\frac{k}{m}=\omega^2$$

另外，与172页相同，设

$$\frac{c}{m}=2\gamma$$

与

$$\frac{F_0}{m}=f$$

则微分方程（5.31）可改写为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=f\cos\nu t \quad \leftarrow \text{考虑外力时的运动方程} \tag{5.32}$$

这就是非齐次微分方程。那么，求一下这个微分方程的解。

由于是非齐次微分方程，就像在第4章见过的那样，用常数变易法进行求解。根据172页的内容，与非齐次方程（5.32）相对应的奇次方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0$$

效仿180页中$\omega^2>\gamma^2$的情况下奇次方程的解，设非齐次方程（5.32）的解为

$$x(t)=A\cos\nu t+B\sin\nu t \quad \leftarrow \text{假设的解} \tag{5.33}$$

A、B为满足微分方程（5.32）的常数。

将假设系数的解（5.11）对t进行微分

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}&=A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\nu t+B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\nu t\\&=-A\nu\sin\nu t+B\nu\cos\nu t\\\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}&=-A\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\nu t+B\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\nu t\\&=-A\nu^2\cos\nu t-B\nu^2\sin\nu t\end{aligned}$$

代入微分方程（5.32）

$$\begin{aligned}&\{-A\nu^2\cos\nu t-B\nu^2\sin\nu t\}+2\gamma\{-A\nu\sin\nu t+B\nu\cos\nu t\}+\omega^2(A\cos\nu t+B\sin\nu t)\\&=f\cos\nu t\end{aligned}$$

进行整理

$$\{(\omega^2-\nu^2)A+2\gamma\nu B\}\cos\nu t+\{2\gamma\nu A+(\omega^2-\nu^2)B\}\sin\nu t=f\cos\nu t$$

为满足上式

$$\begin{cases}(\omega^2-\nu^2)A+2\gamma\nu B=f\\-2\gamma\nu A+(\omega^2-\nu^2)B=0\end{cases}$$

必须成立。对这个并列方程进行求解，则常数A和B为

$$A=\frac{\omega^2-\nu^2}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f,\ B=\frac{2\gamma\nu}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f$$

根据假设的解（5.33）得到特解

$$x(t)=\frac{\omega^2-\nu^2}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f\cos\nu t+\frac{2\gamma\nu}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f\sin\nu t \tag{5.34}$$

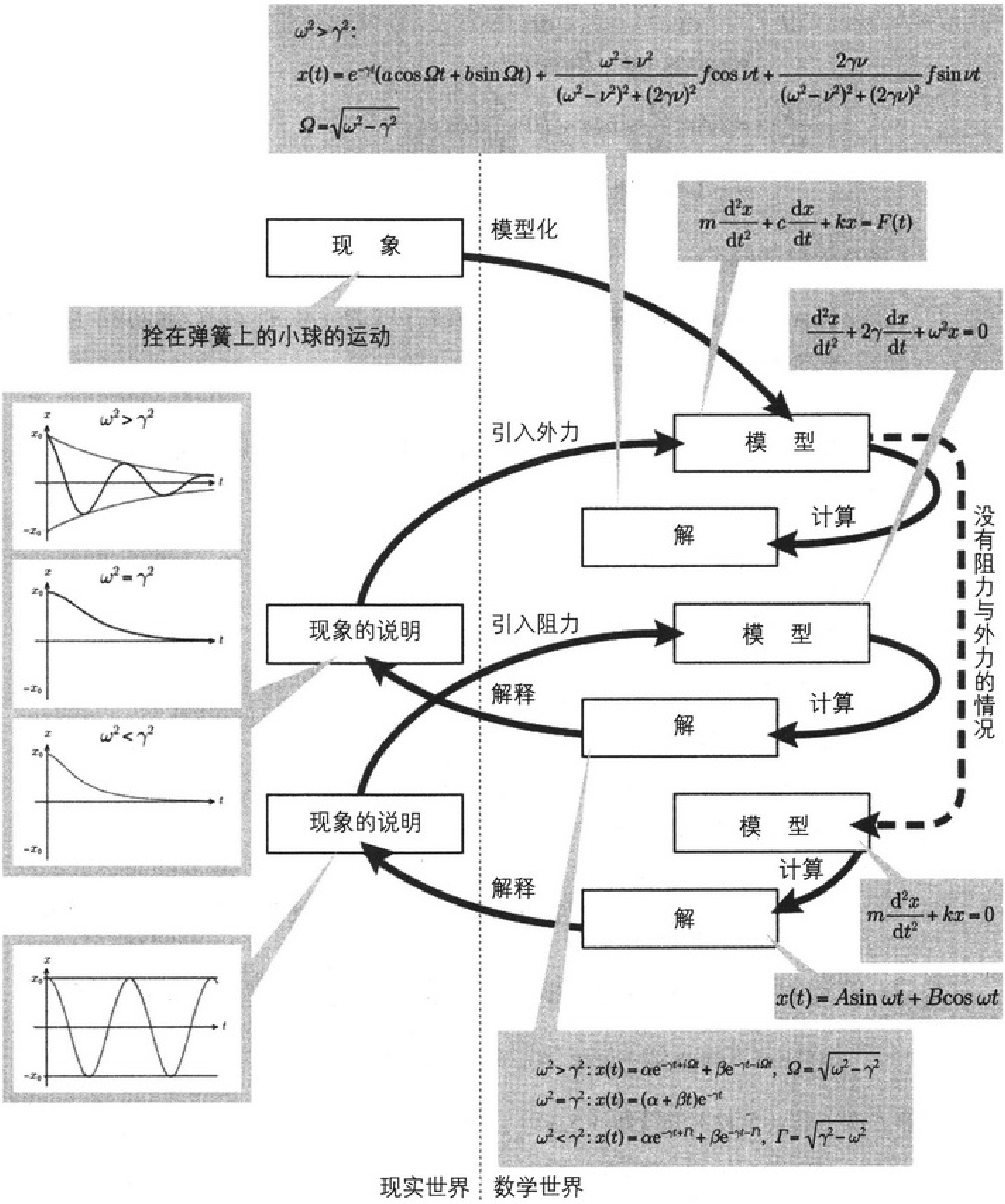
最后，微分方程（5.32）的通解为齐次方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$ 的通解（5.16）

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}(a\cos\Omega t+b\sin\Omega t),\ \Omega=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$$

和非齐次方程（5.32）的特解（5.34）之和，因此

$$\begin{aligned}x(t)=&\,\mathrm{e}^{-\gamma t}(a\cos\Omega t+b\sin\Omega t)\\&+\frac{\omega^2-\nu^2}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f\cos\nu t+\frac{2\gamma\nu}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f\sin\nu t\end{aligned} \tag{5.35}$$

终于得到通解了。



◆ **引入外力的情况下，拴在弹簧上小球运动的解**

是的。

■ 有外力情况下的解

考虑小球在原点静止的状态下，有周期性的外力作用于小球，且外力的角速度与固有角速度相等。也就是说$\gamma=\omega$。初始条件$t=0$时，$x(0)=x_0$, $[\mathrm{d}x/\mathrm{d}t]_{t=0}=0$。首先，通解（5.35）中代入$\gamma=\omega$

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}(a\cos\Omega t+b\sin\Omega t)+\frac{f}{2\gamma\omega}\sin\omega t \tag{5.36}$$

应用初始条件$x(0)=x_0$，则

$$x(0)=\mathrm{e}^{-\gamma 0}\{a\cos(\Omega\cdot 0)+b\sin(\Omega\cdot 0)\}+\frac{f}{2\gamma\omega}\sin(\omega\cdot 0)=a=0 \tag{5.37}$$

另外，将解（5.36）对t进行微分

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=-\gamma\mathrm{e}^{-\gamma t}(a\cos\Omega t+b\sin\Omega t)+\mathrm{e}^{-\gamma t}(-a\Omega\sin\Omega t+b\Omega\cos\Omega t)+\frac{f}{2\gamma}\cos\omega t\\&=\mathrm{e}^{-\gamma t}\{(-\gamma a+b\Omega)\cos\Omega t-(\gamma b+a\Omega)\sin\Omega t\}+\frac{f}{2\gamma}\cos\omega t\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0}&=\mathrm{e}^{-\gamma 0}\{(-\gamma a+b\Omega)\cos(\Omega\cdot 0)-(\gamma b+a\Omega)\sin(\Omega\cdot 0)\}+\frac{f}{2\gamma}\cos(\omega\cdot 0)\\&=-\gamma a+b\Omega+\frac{f}{2\gamma}=0\end{aligned} \tag{5.38}$$

最后根据式（5.37）和（5.38）得到

$$\begin{cases}a=0\\-\gamma a+b\Omega+\dfrac{f}{2\gamma}=0\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}a=0\\b=-\dfrac{f}{2\gamma\Omega}\end{cases} \tag{5.39}$$

因此，把式（5.39）代入通解（5.36）中，则解为

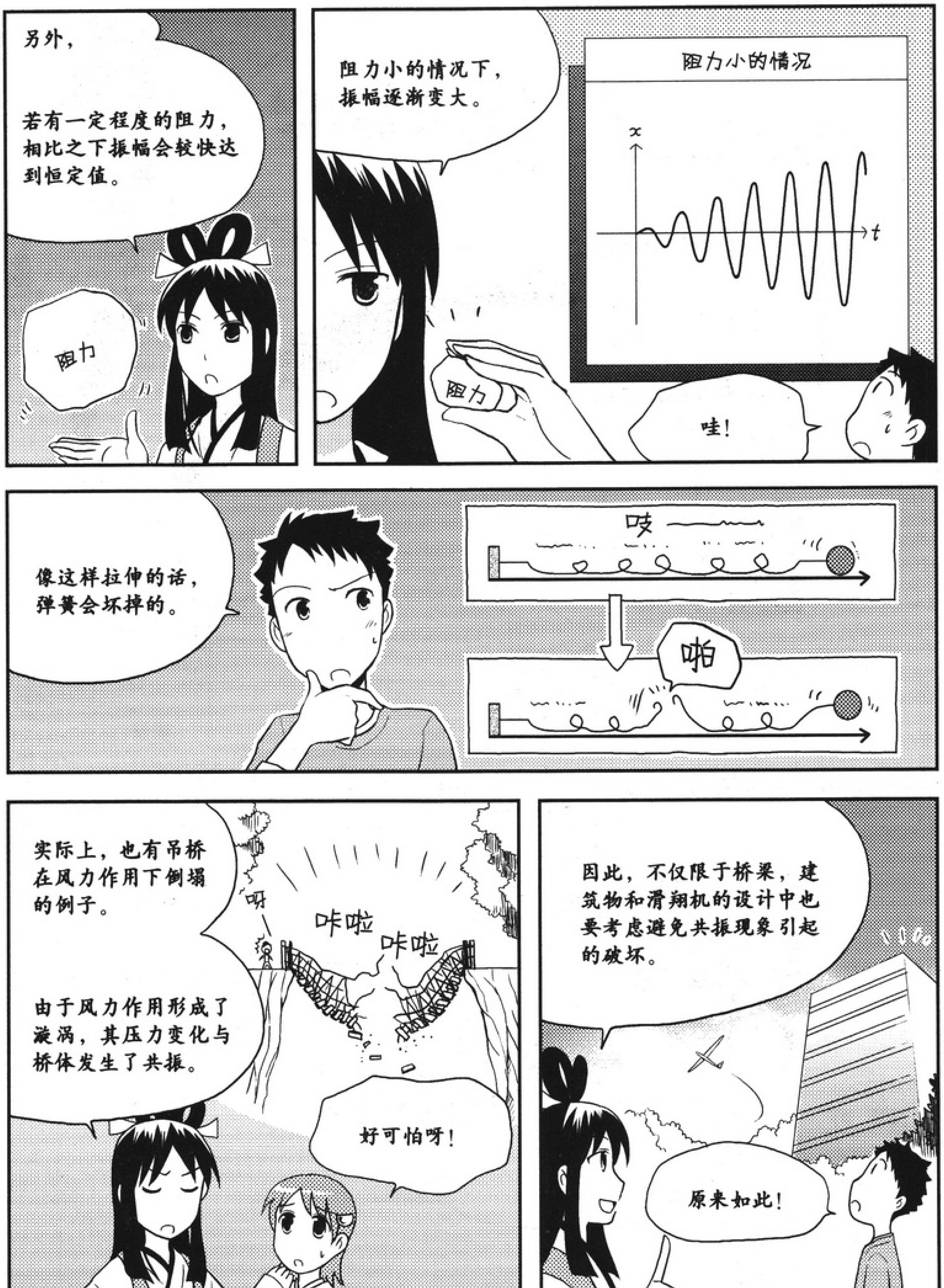
$$x(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(-\frac{f}{2\gamma\Omega}\sin\Omega t\right)+\frac{f}{2\gamma\omega}\sin\omega t$$

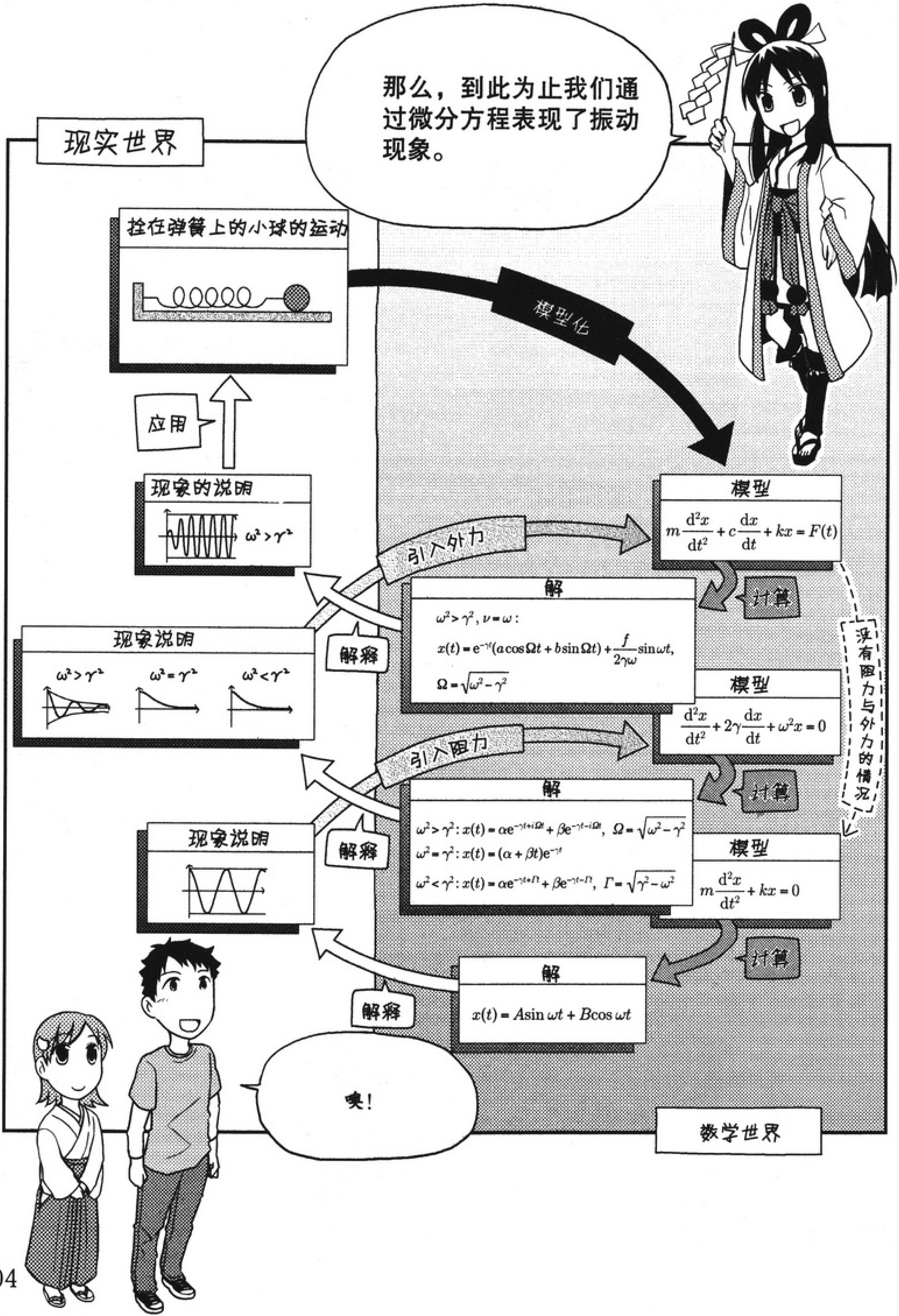
为了使其变得简单，使 $\gamma<<\omega$，则$\Omega\sim\omega$，解可以表示为

$$x(t)=\frac{f}{2\gamma\omega}(1-e^{-\gamma t})\sin\omega t$$

噢！

如图所示。
有周期性外力情况下的解
(强迫振动)
x
$\frac{f}{2\gamma\omega}$
t
$-\frac{f}{2\gamma\omega}$
振幅逐渐变大。
是啊，这样逐渐变得与振幅恒定的简谐振动相似。
简谐振动
后半部分真的很像啊。
真的耶。
像这样的振动，
强迫振动
叫做强迫振动。
顺便说一下，外力的角速度与物体的固有角速度相等的情况下，振幅达到最大。
$\nu=\omega$
是的！
这种现象叫做共振，也叫共鸣。


另外，
若有一定程度的阻力，相比之下振幅会较快达到恒定值。
阻力
阻力小的情况下，振幅逐渐变大。
阻力小的情况
x
t
阻力
哇！
像这样拉伸的话，弹簧会坏掉的。
吱——
啪
实际上，也有吊桥在风力作用下倒塌的例子。
由于风力作用形成了漩涡，其压力变化与桥体发生了共振。
呀
咔啦
咔啦
好可怕呀！
因此，不仅限于桥梁，建筑物和滑翔机的设计中也要考虑避免共振现象引起的破坏。
原来如此！


那么，到此为止我们通过微分方程表现了振动现象。
现实世界
拴在弹簧上的小球的运动
模型化
应用
现象的说明
$\omega^2>\gamma^2$
模型
$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+c\dfrac{dx}{dt}+kx=F(t)$
引入外力
计算
解
$\omega^2>\gamma^2,\ \nu=\omega:$
$x(t)=e^{-\gamma t}(a\cos\Omega t+b\sin\Omega t)+\dfrac{f}{2\gamma\omega}\sin\omega t,$
$\Omega=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$
解释
现象说明
$\omega^2>\gamma^2$
$\omega^2=\gamma^2$
$\omega^2<\gamma^2$
没有阻力与外力的情况
模型
$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\dfrac{dx}{dt}+\omega^2x=0$
引入阻力
计算
解
$\omega^2>\gamma^2: x(t)=\alpha e^{-\gamma t+i\Omega t}+\beta e^{-\gamma t-i\Omega t},\ \Omega=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$
$\omega^2=\gamma^2: x(t)=(\alpha+\beta t)e^{-\gamma t}$
$\omega^2<\gamma^2: x(t)=\alpha e^{-\gamma t+\Gamma t}+\beta e^{-\gamma t-\Gamma t},\ \Gamma=\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$
解释
现象说明
模型
$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$
计算
解
$x(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$
解释
噢！
数学世界

怎么样？
理解微分方程了吗？
是啊！
像这样……一点点螺旋上升的过程中，有一种逐渐接近所求的东西的感觉。
也许是因为数学之神您举的例子易于理解吧。
那是因为对大地的期望值太低了。
迫不得已才举的例子呀!
尽管如此……
我也明白了简单易懂地传授知识有多么重要！
谢谢！
是啊，那个……

太好了……
神仙姐姐和大地都太好了……
总算有越过障碍感觉了吧！
要想掌握模型化的关键之处，你还应该试着解决各种问题才行啊！
知道了，非常感谢！
那么……
呵
呵
大地……
到此为止，你的愿望已经实现了！

以后要加油啊！
再会！
88
那个……
女神！
神仙姐姐……
还挺忙的呢！
是呀……
啊


唉……
好累呀……
不行啦，真的不行啦！
女神！
啊？
你们怎么还没走啊？
那个……
想好好打个招呼。
就这么说定了！
我们走吧！
走吧！
嗯？啊……甜点……
但是我不在家不太好吧？
没空闲了！
这也算是学习呀。
神仙姐姐，不好好了解一下大家的生活怎么行呢？
真是个会讨好人的家伙……
要是那么说的话……还是去吧！


好！
甜点之旅开始啦！
诶？
大地！
你来做向导吧！
我能行吗？
说你行，你就行啦！
女神您不是对甜点挺有研究吗？
微分方程都还没弄明白呢！！
哈
我知道了……


这次，我可以实现一下女神的愿望了！
不好吃的话，你会受到上天的惩罚……
好吧……

附　录

1. 咖啡的冷却

现在，人们能轻易地喝到各种咖啡了，对于喜欢咖啡的人来说这真是件愉快的事。要说省事儿的话，还是要说日本，现在全日本到处都有的罐装咖啡自动售货机了。

可是，装入罐中的热咖啡会慢慢地冷却。可也有从自动售货机里出来热得不能碰的咖啡，直接喝的话，会被烫伤。那么，什么时候才适于饮用呢？

热咖啡的冷却也能用微分方程建模。如果咖啡的温度比周围空气高的话，咖啡的温度就会下降。研究一下温度随时间的变化，就可以明白其与周围空气的温差成正比[1]。若设时间为t，咖啡的温度为$T(t)$，周围空气的温度为T_e，比例常数为k，则

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_e)$$ ← 描述咖啡的温度随时间变化的微分方程

这就叫做牛顿冷却定律[2]。

我们对这个方程进行求解，首先，确认一下变量。

因变量

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_e)$$

自变量

虽然有一些多余的东西，但还是能看出是可分离变量微分方程。两边除以$T-T_e$，则

$$\frac{1}{T - T_e}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k$$

两边分别进行积分

$$\int \frac{1}{T - T_e}\,\mathrm{d}T = -k\int \mathrm{d}t$$

式子的左右两边分别被变量T和t的积分成功分离。

1 如果有温度计、腕表、画图用纸的话，就能立即确认。
2 该法则说明的不是温度随时间的变化，而是热量随时间的变化，如果热容不随温度发生变化的话，也表示同样的结果。

$$\int \frac{1}{T-T_e}\mathrm{d}T=-k\int \mathrm{d}t$$

左右两边分别求积分，则

$$\int \frac{1}{T-T_e}\mathrm{d}T=\ln\left|T-T_e\right|+C$$

$$-k\int \mathrm{d}t=-kt+C$$

综合积分常数，则

$$\ln\left|T-T_e\right|=-kt+C$$

温度关于时间的函数$T(t)$，则变成

$$T(t)-T_e=e^{-kt+C} \quad \leftarrow \text{微分方程的解}$$

到此，微分方程被解出来了。

其次是确定积分常数。假设初始条件为，t=0时咖啡温度为$T(0)=T_0(>T_e)$[3]，根据式（2.31）得出

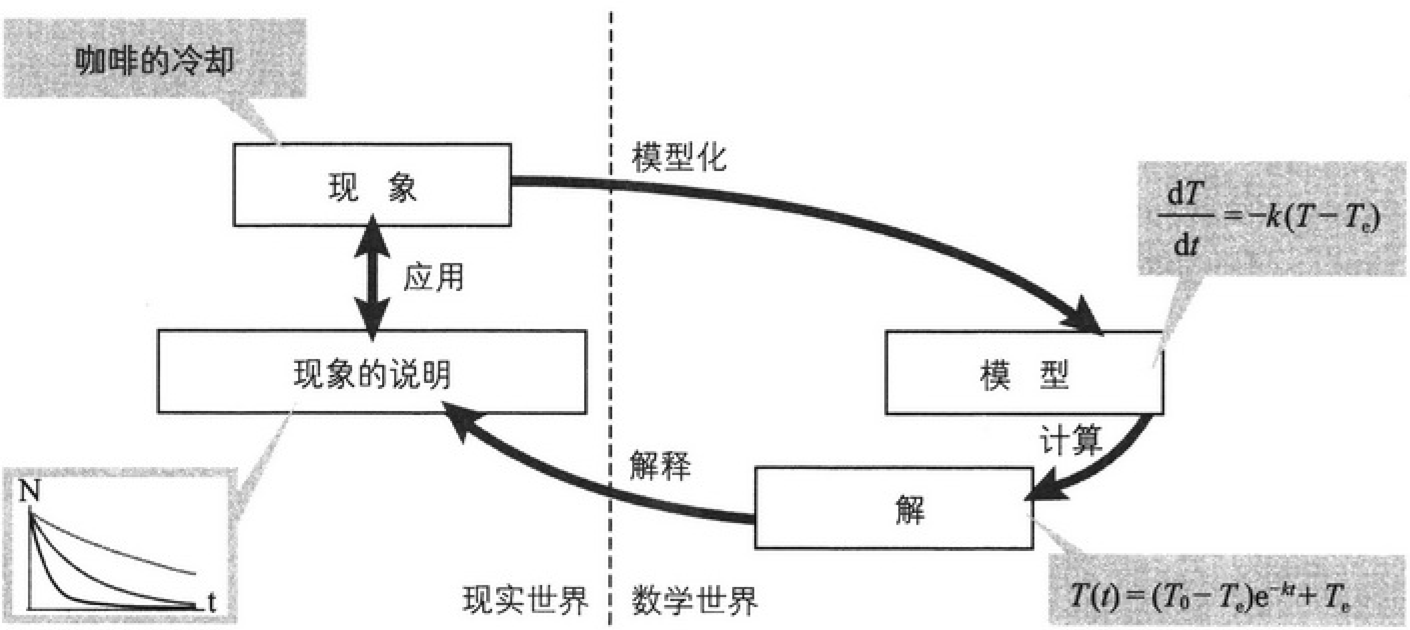
$$T(0)-T_0=e^c$$

则

$$T_0-T_e+e^c$$

那么，描述咖啡温度的函数为

$$T(t)=(T_0-T_e)e^{-kt}+T_e$$

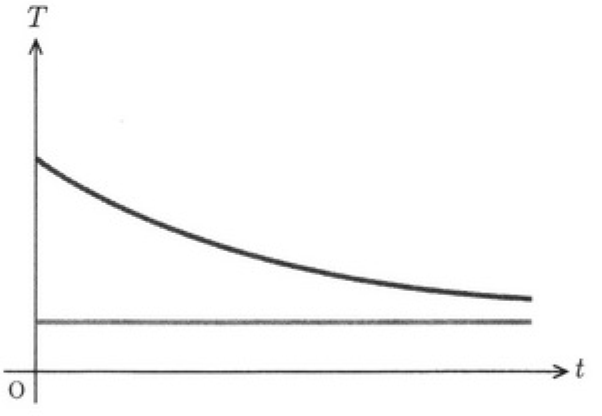


这里要说明咖啡如何随时间流逝而冷却的

◆ **咖啡冷却现象的说明**

3 这里指的都是热咖啡。

咖啡冷却解曲线为核衰变解曲线的上移图[4]。当参数k变大的时候，咖啡会加速冷却。



将核衰变的解曲线向上平移就能得到咖啡冷却的解曲线

◆ **表示咖啡的温度T随时间t变化的曲线**

也就是说，过热的咖啡从自动售货机出来的时候，仅仅用很短的时间测定温度的变化的参数k的话，就可以预测到什么时候可以喝了。但是，预测之后，就不能呼呼吹咖啡了。因为k发生变化的话，预测也会发生偏离哦。

4 如果较为熟练的话，仅仅看到微分方程就能在心里想象出其曲线的样子。只有加强练习才能做到。

2. 火箭的飞行

有一个位于太平洋岸的小镇叫大树町，在北海道的十胜地区，它以打造“宇宙之城”为目标，进行混合燃料火箭[5]的发射实验，大部分火箭都是通过推进剂与氧化剂进行化学反应，把燃烧的气体舍弃在后边飞行的[6]。由于火箭不能舍弃所有自身重量，它的速度是有上限的。这个速度的上限叫做到达速度。那么，我们试着计算一下火箭的到达速度。

设时间为t,火箭的速度为$V(t)$,火箭的质量为M,从火箭的马达排气的速度为v的话，微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}M}=-\frac{v}{M} \quad \leftarrow \text{描述火箭速度的微分方程}$$

这是一个可分离变量微分方程。对该方程进行求解，设舍弃质量之前火箭的质量为M_i，舍弃质量之后的火箭质量为M_f，则

$$V=v\ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \quad \leftarrow \text{微分方程的解}$$

这个方程就叫做齐奥尔科夫斯基方程，利用它能够计算火箭的到达速度。比如说，使用排气速度为v=1500m/s的火箭马达，发射之前火箭的重量为M_i=10kg，推进材料燃烧后火箭的重量为M_f=9kg的情况下，小型火箭的到达速度为158m/s。

5 在推进剂与氧化剂中使用固体与液体的火箭。
6 就像离子推进火箭那样，使用电能的火箭也在慢慢地得到实际的应用。
7 火箭就像运载重物的卡车一样，因此火箭本身与重物的质量不可能什么都不留下。

3. 心理量

我们身体反应中的有些东西也可以用可分离变量微分方程来说明。比如说，闭上眼睛，拿过来一个10g的物体。当质量变成两倍20g的时候，感觉不出两倍的重量，感觉到两倍重量的时候，其实拿的应该是100g左右重量的东西了。我们的感觉也是遵循对数函数变化的。不仅仅是对重量的感觉，对声音大小的感觉等也是如此。这就叫做费希纳定律。

设物理性强度为I，感觉性强度为$E(I)$，k为常数的话，微分方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}I}=\frac{k}{I} \quad \leftarrow \text{描述感觉性强度的微分方程}$$

进行求解，则

$$E=k\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \leftarrow \text{微分方程的解}$$

这里，我们设与能够感受到的最低刺激相对应的反应为0。

$$E(I_0)=0$$

参数k和I_0根据人的不同感觉而异。

8 也有敏感的人和迟钝的人。

4. 广告的效果

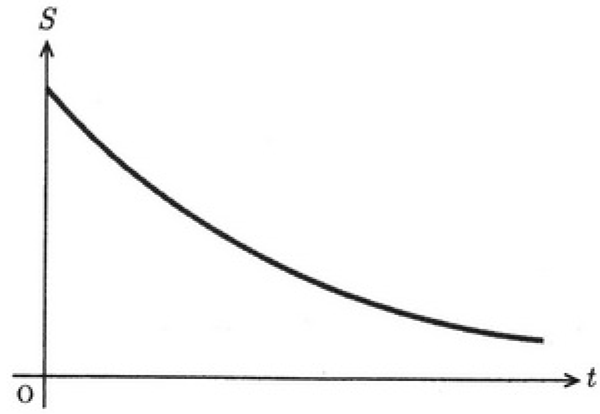
首先求一下较容易求得的解，然后对其进行补充，使其满足原来想要求解的微分方程，这种解法叫做常数变易法，它不仅对于自然现象，对于社会现象也是很有效的。

世上充满了五花八门的广告。为什么会有如此多的广告呢？这是因为，不宣传的话，销售额会下降[9]。实际上，如果完全没有促销的话，销售状况会呈指数函数式地减少[10]。我们把这种情况用微分方程进行模型化。

设 λ 和 μ 为常数，根据调查结果，销售速度（单位时间内出售的数量）S随时间t的变化能用下面的指数函数进行说明。

$$S(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t+\mu} \tag{A.1}$$

当然，在只有一个人感兴趣的情况下，只有在概率上能知道这个人到底买还是不买。那么，在很多人感兴趣的情况下，不做广告时就可以用式（A.1）所描述的函数来说明销售速度。



◆ 不做广告的情况下，销售速度随时间的变化

这个函数可以作为可分离变量微分方程的解，早已为我们所熟知。参考可分离变量微分方程的情况，满足这个函数的微分方程可以表示成[11]

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\lambda S$$

这就是不做广告的情况下销售速度的微分方程。

9 或者因为害怕销售额下滑。
10《用微分方程做数学模型》(Burghes, David; Borrie, Morag著，日本评论社)P76。数据有些陈旧。
11 对真假有所怀疑的人，请把函数S代入进行确认。

那么，做广告的话会变成什么样呢。做广告的话，看见广告的人当中会出现购买商品的人[12]。看见广告的人当中有恒定比例的人购买商品的话，销售速度应该与看见广告的人的比例A（t）呈正比地增加。但不能希望做了广告，一定就能卖很多。由于能够购买商品的人数有限，不久便会达到顶点，销售速度也会变成恒定值[13]。这也就是说，销售速度有极限M（销售速度的最大值），当实际销售速度S接近销售速度的最大值M的时候，销售速度S会变迟缓。也就是说，销售速度S与销售速度的最大值M和销售速度S之差（销售速度上升的空间）呈正比。速度最大值M对应的销售速度上升空间$M-S$之比（$M-S$）/M表示的是销售速度增长的比例。综上所述，设γ为常数，那么，做广告之后销售速度随时间的变化与

$$\gamma A \cdot \frac{M-S}{M}$$

成正比，因此微分方程可以表现为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\lambda S + \gamma A \cdot \frac{M-S}{M}$$

右边稍微进行整理，则

$$-\lambda S + \gamma A \cdot \frac{M-S}{M} = -\lambda S + \gamma A - \gamma \frac{AS}{M} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) S + \gamma A$$

则微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) S + \gamma A \quad \leftarrow \text{原来想求解的非齐次方程} \tag{A.2}$$

就变成了非齐次方程。立刻用常数变易法进行求解。

与非齐次方程（A.2）对应的齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) S \quad \leftarrow \text{齐次方程} \tag{A.3}$$

首先用常数变易法对其进行求解。变量分离，则

$$\int \frac{\mathrm{d}S}{S} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) \int \mathrm{d}t$$

12 不能断定只要做了广告就会出现购买的人，这句话的意思是说假设这个广告是一个有效的广告。

13 卖货的人想扩大市场，但是不论多想扩大销售规模，还是被地球上的人口数量所限制。

分别对两边进行积分

$$\ln|S| = -\left(\lambda + \gamma\frac{A}{M}\right)t + C$$

所求的解就变成

$$S = \pm e^{-\left(\lambda+\gamma\frac{A}{M}\right)t+C}$$

把常数综合为C= ± e^c,则

$$S = ce^{-\left(\lambda+\gamma\frac{A}{M}\right)t} \quad \leftarrow \text{齐次方程的通解} \tag{A.4}$$

为齐次方程（A.3）的通解。

其次，对齐次方程的通解（A.4）进行补充使其满足非齐次方程（A.2）。把常数c替换为时间t的函数，则

$$S(t) = c(t)e^{-\left(\lambda+\gamma\frac{A}{M}\right)t} \quad \leftarrow \text{假设的非齐次方程的解}$$

由于这个假设的解满足微分方程（A.2），代入式中进行微分

$$\frac{dc(t)}{dt}e^{-\left(\lambda+\gamma\frac{A}{M}\right)t} + c(t)\left(-\left(\lambda+\gamma\frac{A}{M}\right)e^{-\left(\lambda+\gamma\frac{A}{M}\right)t}\right) = -\left(\lambda+\gamma\frac{A}{M}\right)c(t)e^{-\left(\lambda+\gamma\frac{A}{M}\right)t} + \gamma A$$

再进行整理

$$\frac{dc(t)}{dt} = \gamma Ae^{\left(\lambda+\gamma\frac{A}{M}\right)t}$$

替换成，$\alpha = \lambda + \gamma\frac{A}{M}$进行积分，则

$$c(t) = \gamma A\int e^{\alpha t}dt = \gamma A\frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + c'$$

所求的通解为

$$S(t) = \left(\gamma A\frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + c'\right)e^{-\alpha t} = \frac{\gamma A}{\alpha} + c'e^{-\alpha t} \quad \leftarrow \text{非齐次方程的通解} \tag{A.5}$$

我们确定一些具体的条件来看一下这个解是如何说明广告效果的。我们认为，即使不做广告也会有一定比例的人购买商品。因此开始做广告的时间设为t=0，把销售速度S的初始值设为S（0）=S_0。另外，0<t<T的期间内，做一定的广告，看到广告的人的比例是恒定的。

假设

$A(t)=A(0<t<T)$

把销售速度的初始值S（0）=S_0代入解（A.5）,则

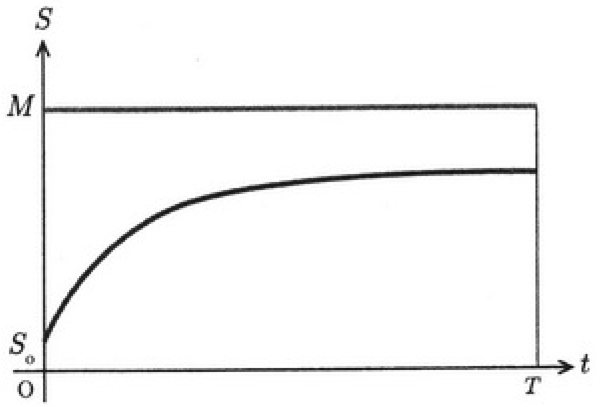
$$S(0)=S_0=\frac{\gamma A}{\alpha}+c'e^{-\alpha\cdot 0}$$

$$\therefore c'=S_0-\frac{\gamma A}{\alpha}$$

那么，$0<t<T$期间内的销售速度为

$$S(t)=\frac{\gamma A}{\alpha}+\left(S_0-\frac{\gamma A}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\alpha t} \quad \leftarrow 0<t<T\text{期间内的销售速度} \qquad (\text{A.6})$$

广告刚开始出现的时候，虽然销售速度会急剧增加，但是速度的增加会逐渐地变迟缓，然后接近恒定的值。



◆ **做广告的情况下，销售速度随时间的变化**

如果停止做广告，会变成什么样呢？$t=T$时停止广告的话，$t>T$时由于$A=0$，因此微分方程（A.5）为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\lambda S$$

通解与调查结果所得式子（A.1）相同，则

$$S(t)=c''\mathrm{e}^{-\gamma t} \quad \leftarrow \text{齐次方程的通解} \qquad (\text{A.7})$$

但是由于做广告之后销售速度持续增长，这次就从$t=T$时刻的销售速度S（T）开始减少。把$0<t<T$期间的销售速度（A.6）中代入$t=T$，则

$$S(T)=\frac{\gamma A}{\alpha}+\left(S_0-\frac{\gamma A}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\alpha T}$$

因此，根据通解（A.7）,则

变成

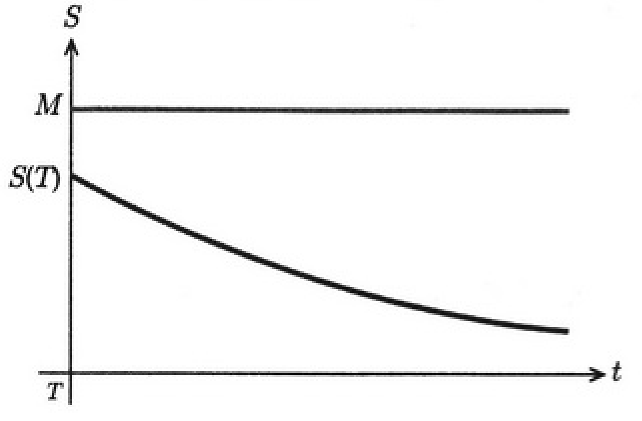
$$S(T)=c''\mathrm{e}^{-\lambda T}=\frac{\gamma A}{\alpha}+\left(S_0-\frac{\gamma A}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\alpha T}$$

$$\therefore c''=\left(\frac{\gamma A}{\alpha}+\left(S_0-\frac{\gamma A}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\alpha T}\right)\mathrm{e}^{\lambda T}$$

最后，解为

$$S(t)=\left(\frac{\gamma A}{\alpha}+\left(S_0-\frac{\gamma A}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\alpha T}\right)\mathrm{e}^{-\lambda(t-T)} \qquad \leftarrow t>T\text{时的销售速度}$$

如果停止广告，销售速度会逐渐地减小。



◆ **停止广告之后销售速度随时间的变化**

虽然现实的经济中没有那么纯粹的事情[14]，但是涉及到很多人的行为的时候，个性被平均化，人们的行动也能用微分方程来说明，真是好有趣呀。

14 实际上，正在制作更为复杂的模型。

5. 积分因子解法

第3章中，我们看过了用常数变易法求解非齐次线性微分方程的方法，但还有一些其他解法。粗略地看一下

非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x) \qquad \leftarrow \text{非齐次方程}$$

的两边除以某个函数$\mu(x)$，则

$$\mu(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mu(x)p(x)y=\mu(x)q(x) \tag{A.8}$$

假设，这个函数$\mu(x)$碰巧有

$$\frac{\mathrm{d}(\mu(x)y)}{dx}=\mu(x)q(x)$$

的性质，那么，这个微分方程的右边就是只含x的函数，进行积分，则

$$\mu(x)y=\int\mu(x)q(x)\mathrm{d}x \tag{A.9}$$

这样，就能够求解了。

我们可以试着调查一下，是否存在那样一个碰巧的函数$\mu(x)$。由于乘积的积分为

$$\frac{\mathrm{d}(\mu(x)y)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x}y+\mu(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

与微分方程（A.8）相比

$$\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x}=\mu(x)p(x) \qquad \leftarrow \text{可分离变量微分方程}$$

如果上述关系成立，那就变得非常方便了。这是可分离变量微分方程

$$\int\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mu(x)}=\int p(x)dx$$

求解

$$\ln|\mu(x)|=\int p(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore\mu(x)=\pm e^{\int p(x)\mathrm{d}x} \qquad \leftarrow \text{积分因子}$$

这样，所得到的这个很方便的函数叫做积分因子。了解了积分因子，那么根据式（A.9）,则

$$y=\frac{\int \mu(x)q(x)\mathrm{d}x}{\mu(x)}$$

也就是说，能够求得非齐次方程的通解。

处理广告效果的非齐次方程（A.2）、用$\alpha=\lambda+\gamma\frac{A}{M}$进行替换

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\alpha S+\gamma A \qquad \leftarrow \text{非齐次方程}$$

能够试着利用积分因子对上述方程进行求解。积分因子$\mu(t)$则

$$\mu(t)=\pm e^{\int \alpha dt}=\pm e^{\alpha t+C}=\pm e^{C}e^{\alpha t}=ce^{\alpha t}$$

看到通解（A.10）就能明白，积分因子也有常数倍的任意性，包含积分常数的$C=\pm e^{C}$为1也没有关系。也就是说

$$\mu(t)=e^{\alpha x} \qquad \leftarrow \text{积分因子}$$

就是积分因子。最后

$$S(t)=\frac{\int \mu(t)\gamma A\mathrm{d}t}{\mu(t)}=\frac{\int e^{\alpha t}\gamma A\mathrm{d}t}{e^{\alpha t}}=\frac{\gamma A}{\alpha}+c'e^{-\alpha t} \qquad \leftarrow \text{非齐次方程的通解}$$

就变成通解。正好与通解（A.5）一致。若发现用积分因子求解方便的函数[15]，那就能够简单地求出非齐次方程的解。

15 若不进行积分就不能发现积分因子，因此不是什么时候都能发现积分因子。

6. 再谈物流模型

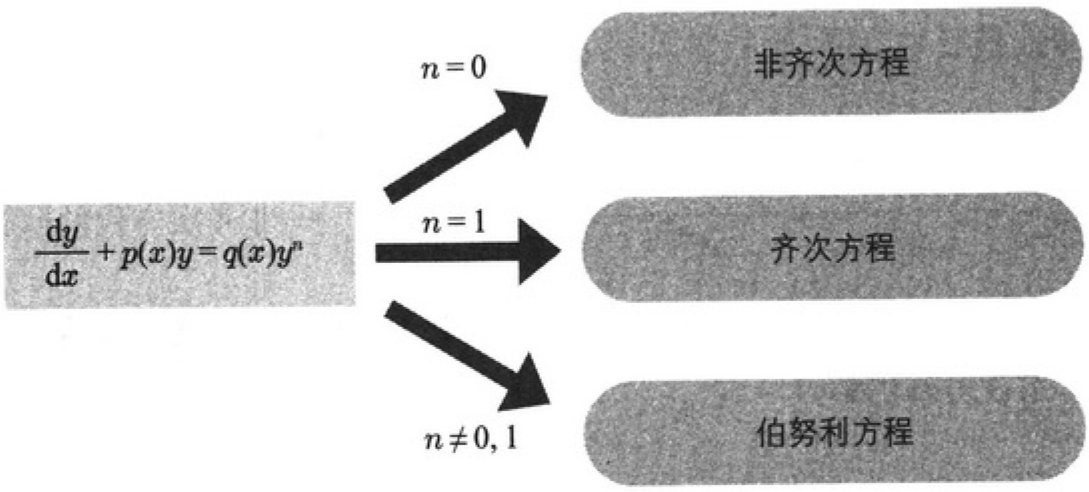
146页中用常数变易法处理的非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x) \quad \leftarrow \text{非齐次方程（线性微分方程）}$$

只要稍微进行延展的话，就可以写成这种形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^n \quad \leftarrow \text{微分方程（非线性微分方程）} \tag{A.11}$$

n=0 的情况为非齐次方程、n=1的情况为齐次线性微分方程。除此之外的情况，就变成伯努利微分方程的非线性微分方程。伯努利微分方程为通过实施变量变换，得到线性微分方程，能够用常数变易法进行求解。



◆ 齐次方程、非齐次方程和伯努利方程

伯努利方程通过置换因变量y

$$z=\frac{1}{y^{n-1}} \quad \leftarrow \text{变量变换} \tag{A.12}$$

能够将其变成线性微分方程。我们试一试。伯努利方程（A.11）的两边除以y^n,则

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+p(x)\frac{1}{y^{n-1}}=q(x) \tag{A.13}$$

那么，式（A.12）的两边对x进行微分，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-(n-1)\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\therefore \frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{n-1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

将上式子与式（A.12）代入到式（A.13）中，则可以写成

$$-\frac{1}{n-1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+p(x)z=q(x)$$

为了更容易理解，两边同时乘以1−n，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(n-1)p(x)z=(n-1)q(x) \qquad \leftarrow \text{非齐次微分方程（线性微分方程）}$$

就变成线性微分方程了。这样一来，就方便求解了。

若是非齐次微分方程，用常数变易法和积分因子法都能够求解。也就是说，伯努利微分方程，是通过变量替换、进行线性化的方法来求解的。

第107页中用分解部分分数这种分离变量的方法所解的物流模型的微分方程，实际上就是伯努利微分方程。我们来想一下，人口用P表示，人口的饱和量用K表示，马尔萨斯半径用μ表示，那么就存在这个微分方程

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\mu\left(1-\frac{P}{K}\right)P$$

把它的右边展开、变形，得到

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}-\mu P=-\frac{\mu}{K}P^2 \qquad \leftarrow \text{伯努利微分方程（非线性微分方程）} \tag{A.14}$$

这个微分方程立刻变成了n=2的伯努利微分方程。

非线性微分方程（A.14）的两边同时除以P^2，得到

$$\frac{1}{P^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}-\mu\frac{1}{P}=-\frac{\mu}{K} \tag{A.15}$$

这里，把因变量P做变量替换

$$z=\frac{1}{P} \qquad \leftarrow \text{变量替换} \tag{A.16}$$

那么，对t求微分就得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{P^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}.$$

$$\therefore \frac{1}{P^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

利用上式，非线性微分方程（A.15）

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \mu z = \frac{\mu}{K} \qquad \leftarrow \text{非齐次方程（线性微分方程）} \tag{A.17}$$

就变成线性微分方程了，这就是非齐次微分方程。之后，用常数变易法进行求解。首先，求解齐次微分方程

$$-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \mu z = 0 \qquad \leftarrow \text{齐次微分方程}$$

变量分离

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\mu \int \mathrm{d}t$$

对两边进行积分

$$\begin{aligned} &\ln|z| = -\mu t + C \\ &\therefore z(t) = \pm \mathrm{e}^{-\mu t + C} = c\mathrm{e}^{-\mu t} \end{aligned} \qquad \leftarrow \text{齐次方程的解} \tag{A.18}$$

假设$C= \pm \mathrm{e}^{C}$。设系数c为时间t的函数

$C=C(t)$

把微分方程的解（A.18）写成

$z(t)=c(t)\mathrm{e}^{\mu t}$

将其代入所有满足的非齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}(c(t)\mathrm{e}^{-\mu t})}{\mathrm{d}t} + \mu c(t)\mathrm{e}^{-\mu t} = \frac{\mu}{K}$$

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mu t} + \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\mu t}}{\mathrm{d}t}c(t) + \mu c(t)\mathrm{e}^{-\mu t} = \frac{\mu}{K}$$

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mu t} - \mathrm{e}^{-\mu t}c(t) + \mu c(t)\mathrm{e}^{-\mu t} = \frac{\mu}{K}$$

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mu t} = \frac{\mu}{K}$$

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu}{K}\mathrm{e}^{\mu t}$$

然后进行积分

得到

$$c(t)=\frac{\mu}{K}\int e^{\mu t}dt+c'=\frac{e^{\mu t}}{K}+c'$$

因此，解为

$$z(t)=\left(\frac{e^{\mu t}}{K}+c'\right)e^{-\mu t} \qquad \leftarrow \text{非齐次方程的解}$$

利用式（A.16），把 z恢复为P，则解为

$$P(t)=\frac{1}{z(t)}=\frac{1}{\left(\frac{e^{\mu t}}{K}+c'\right)e^{-\mu t}}=\frac{Ke^{\mu t}}{e^{\mu t}+Kc'} \qquad \leftarrow \text{就是微分方程的解} \qquad (A.19)$$

与前一章中一样，$t=0$时的人口为P_0

$$P_0=\frac{Ke^{\mu\cdot 0}}{e^{\mu\cdot 0}+Kc'}=\frac{K}{1+Kc'}$$

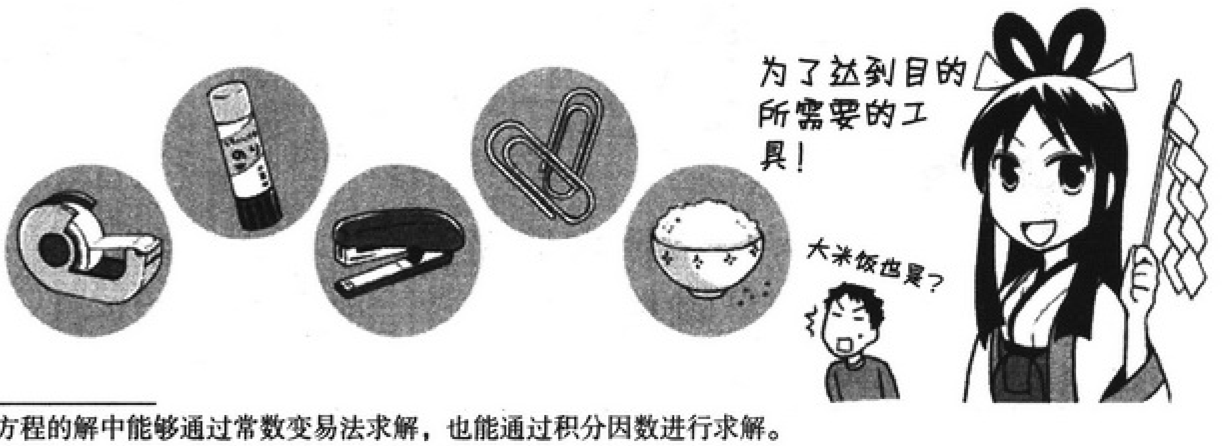
$$\therefore c'=\frac{K-P_0}{KP_0}$$

把上式代入解（A.19）中

$$P(t)=\frac{Ke^{\mu\cdot t}}{e^{\mu t}+K\left(\frac{K-P_0}{KP_0}\right)}=\frac{KP_0}{(K-P_0)e^{-\mu t}+P_0}$$

与108页的（3.7）一致[16]。

条条大道通罗马，求解微分方程也可以用各种各样的方法。首先，只有掌握了成熟的技术，才能进一步发展。伯努利微分方程经过线性化之后，就能够通过常数变易法进行求解。首先，求解一个较容易的齐次微分方程，然后对这个解进行补充使其满足本来要求解的非齐次微分方程。



16 从P^2项的齐次方程的解中能够通过常数变易法求解，也能通过积分因数进行求解。


真能吃啊！
哪一个都好好吃啊！
啊呜啊呜
吃得太多了！都胖了！

（O-4099.0101）
责任编辑：唐　璐　赵丽艳
责任制作：董立颖　魏　谨
封面制作：许思麒

用漫画这种形式讲数学、物理和统计学，十分有利于在广大青少年中普及科学知识。

周恩来、邓颖超秘书，周恩来邓颖超纪念馆顾问
中日友好协会理事，《数理天地》顾问，全国政协原副秘书长

用漫画和说故事的形式讲数学，使面貌冷峻的数学变得亲切、生动、有趣，使学习数学变得容易，这对于提高全民的数学水平无疑是功德无量的事。

《数理天地》杂志社　社长 总编
"希望杯"全国数学邀请赛组委会 命题委员会主任　周国镇

用漫画的形式，讲解日常生活中的数学、物理知识，更能让大家感受到数学殿堂的奥妙与乐趣。

《光明日报》 原副总编辑
中华炎黄文化研究会 常务副会长　鲁谆

科学漫画是帮助学习文科的人们用形象思维的方式掌握自然科学的金钥匙。

中国人民大学外语学院日语专业 主任
大学日语教学研究会 会长　成同社

在日本留学的时候，我在电车上几乎每次都能看到很多年轻的白领看这套图书，经济实惠、图文并茂、浅显易懂，相信这套图书的中文版也一定会成为白领们的手中爱物。

大连理工大学 能源与动力学院 博士 副教授

我非常希望能够在书店里看到这样的书：有人物形象、有卡通图、有故事情节，当然最重要的还有深厚的理工科底蕴。我想这样的书一定可以大大提升孩子们的学习兴趣，降低他们对于高深的理工科知识的恐惧感。

北京启明星培训学校 校长

书中的数学知识浅显实用，漫画故事的形式使知识贴近生活，概念更容易理解。

北京大学 数学科学学院 博士　张磊

上架建议：科普/漫画
ISBN 978-7-03-029193-6
9 787030 291936 >

科学出版社 东方科龙
http://www.okbook.com.cn
zhaoliyan@mail.sciencep.com

定价:32.00元